Module d'Young complexe

Version papier téléchargeable

Table des matières

But du TP

Dans ce TP on se propose de mesurer le module d'Young complexe d'un acier et d'un matériau viscoélastique, le PVC, soumis à une vibration de flexion, par l'intermédiaire d'une mesure d'impédance mécanique.

I. Introduction théorique

1. I.1. Propriétés d'élasticité

Lorsqu'un matériau est soumis à une contrainte, il se déforme. Mais la façon dont il se déforme est radicalement différente s'il s'agit d'un métal habituel (aluminium, acier.., on parle d'un « matériau idéal de Hooke ») ou s´il s´agit d'un polymère (une matière plastique) que l'on qualifie de « viscoélastique ».

- Considérons l'exemple d'une poutre horizontale encastrée soumise à l'action d'une masse à son extrémité. Si la poutre est en métal, la déformation est immédiate et stable.

  Si la poutre est en PVC, ou une autre matière viscoélastique, la déformation de la poutre n'est jamais stabilisée: la poutre se déforme de plus en plus lorsque le temps s'écoule, de moins en moins vite certes, mais sans jamais être, dans l'absolu, stabilisée.

  De même, si on supprime la masse, la poutre métallique revient instantanément à sa forme initiale, la poutre en PVC ne reviendra à sa forme initiale qu'après « un certain temps » mais y reviendra quand même. Il y a là un phénomène élastique dans les deux cas, mais avec une sorte de viscosité pour le PVC, d'où le terme « viscoélastique ».
- Abandonnons cette description de phénomènes statiques pour parler de comportements dynamiques: la vibration.

  On appuie sur l'extrémité des poutres, on lâche instantanément: les deux poutres vibrent.

  Mais la poutre métallique vibre longtemps, la poutre en PVC voit très vite sa vibration cesser, la vibration est fortement amortie.

  Sans entrer dans le détail, on attribue ces différences de comportement élastique entre les deux types de matériaux à des frottements internes entre les macromolécules de polymères, ce qui dissipe de l'énergie mécanique (sous forme de chaleur). Cela ne se produit quasiment pas dans les métaux.
- Pour un métal, dans le cas d'une excitation par une contrainte uni axiale sinusoïdale σ, la déformation uni axiale ϵ est rigoureusement en phase avec la contrainte uni axiale. Ce qui permet d'écrire la fameuse **Loi de Hooke** pour une contrainte uni axiale, où E est le module d'Young, appelé aussi module d'élasticité.

  $$\sigma = \sigma_0.e^{j\omega t}$$

  $$\varepsilon = \varepsilon_0.e^{j\omega t}$$

  $$\sigma = E.\varepsilon$$
- Pour un matériau viscoélastique soumis à une contrainte uni axiale sinusoïdale, un déphasage δ existe entre contrainte σ et déformation ε uni axiales. Le module d'Young complexe est défini par la même relation :

  $$\sigma = \sigma_0.e^{j\omega t}$$

  $$\varepsilon = \varepsilon_0.e^{j(\omega t-\delta)}$$

  $$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}e^{j\delta} = E_r + j.E_m$$

Le rapport $\frac{E_m}{E_r}$ définit le frottement interne, ou la capacité d'amortissement (aussi appelée facteur de perte), η (eta) :

$$\eta = tg(\delta) = \frac{E_m}{E_r}$$

et

$$E = E_r(1 + j\eta)$$

La partie réelle du module d'Young, ou MODULE D'ÉLASTICITÉ, mesure la capacité d'un matériau à résister à une déformation :

- Er élevé : matériau rigide
- Er faible : matériau souple

La partie imaginaire du module d'Young est une mesure de la « capacité d'amortissement », c.à.d. de la capacité que possède un matériau à amortir beaucoup ou peu les vibrations.

2. I.2. Mouvement à faible amplitude de déformation

2.1. Résonance

Dans le domaine de basses ou moyennes fréquences, on peut déterminer le module d'Young à partir de la mesure des premières fréquences de résonance (ou fréquences propres) d'une poutre en vibration de flexion.

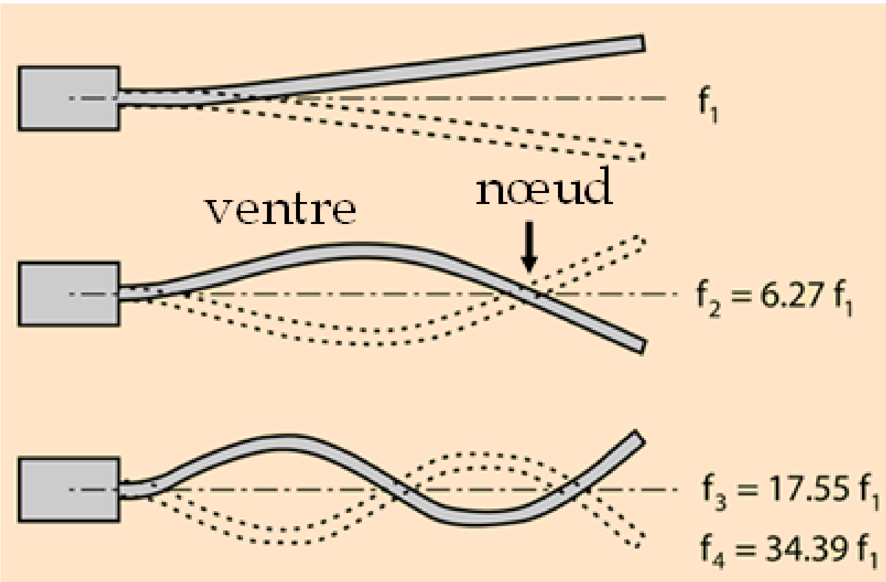
C'est une méthode applicable aux nanomatériaux.

La résonance est un phénomène qui se produit lorsqu'un système oscillant est excité en régime permanent par un signal périodique dont la fréquence est égale à une fréquence propre du système.

L'énergie absorbée par le système est alors maximale.

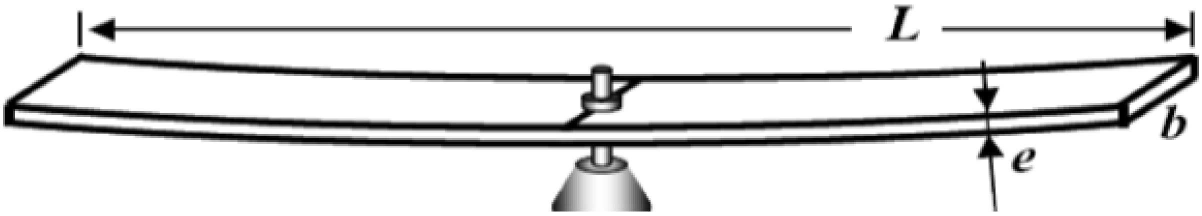
Les fréquences de résonance peuvent être en nombre fini (systèmes à nombre fini de degrés de liberté) ou en nombre infini (suite dénombrable en général) dans le cas des systèmes avec propagation.

Dans une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre, les premiers modes propres successifs sont observés aux fréquences f_1, f_2, f_3, avec un profil d'amplitude caractéristique:



Dans ce TP, l'éprouvette est une lame d'acier, puis de PVC, de section rectangulaire, sollicitée en son milieu.

Cette lame est fixée sur un pot vibrant dont on peut ajuster et mesurer la fréquence de vibration.



2.2. I.2.1. Module d'Young (partie réelle)

Pour une lame réalisée dans un matériau idéal de Hooke (par exemple un métal classique) en vibration de flexion, les fréquences de résonance, f_i, de la lame sont décrites par :

$$f_i = \frac{2}{\Pi}\frac{\beta_i^2}{L^2}\sqrt{\frac{E.I}{\rho.S}}$$ (formule 1)

où :

E est le module d'Young du matériau,

ρ la masse volumique du matériau,

L la longueur de la barre,

S est la section (constante), $S = b.e$

I le moment quadratique d'une section droite de la barre par rapport à son axe de flexion :

soit pour une section rectangulaire, avec b l'épaisseur et e la largeur de la barre

$$I = \frac{b.e^3}{12}$$

β_1 = 1.875 ; β_2 = 4.694 ; β_3 =7.855; β_4 =10.996 (les valeurs de β pour les 4 premières fréquences de résonance).

♦**Question 1** :

A partir des valeurs de β_1, β_2, β_3, β_4 données et de la relation entre la fréquence de résonance et E (formule 1) démontrer les relations entre les fréquences de résonance successives:

$$\frac{f_2}{f_1} = 6,27\,;\frac{f_3}{f_2} = 2,80\,;\frac{f_4}{f_3} = 1,96$$ (formules (2))

Les fréquences de résonance (formule (1)) sont donc la combinaison d'un terme $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ caractérisant les propriétés intrinsèques du matériau (élasticité E, inertie ρ) qui s'identifie à la vitesse de propagation du son dans la poutre et d'un terme géométrique $\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{I}{S}}$ qui caractérise la géométrie de la structure.

♦**Question 2** :

A partir de la formule (1), écrire l'expression simplifiée du module d'Young E, en fonction des variables : fréquence f, longueur L, masse m, largeur b et épaisseur e ;

♦**Question 3** :

Démontrer que la dimension du module d'Young E est $M.L^{-1}.T^{-2}$, c.à.d., la dimension d'une pression, donc l'unité de E est en Pascal (Pa).

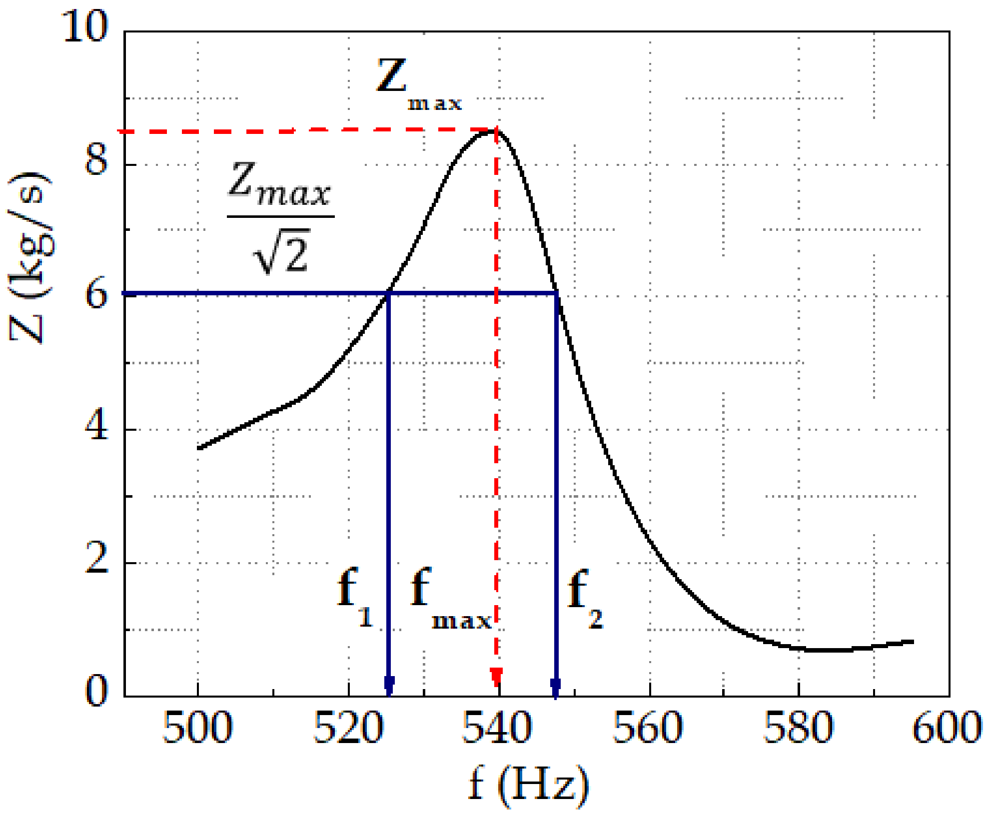
2.3. I.2.2. Module d'Young complexe

Pour un matériau viscoélastique, où E est considéré comme complexe, il y a plusieurs façons de considérer la question.

Dans ce TP, la partie réelle du module d'Young complexe E sera calculée avec la formule (1) ci-dessus, avec $E = E_r$.

- La partie imaginaire sera calculée par la mesure de la capacité d'amortissement η (eta).

On utilisera pour cela la méthode de la bande passante :



Une courbe de résonance sera obtenue (impédance mécanique, Z, en fonction de la fréquence appliquée), comme illustrée dans la figure ci-dessus.

La largeur de la bande passante est la largeur de la courbe au niveau $\frac{Z_{max}}{\sqrt{2}}$ (soit -3 dB).

On aura alors:

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_{max}} = tan(\delta) = \frac{E_{im}}{E_r}$$

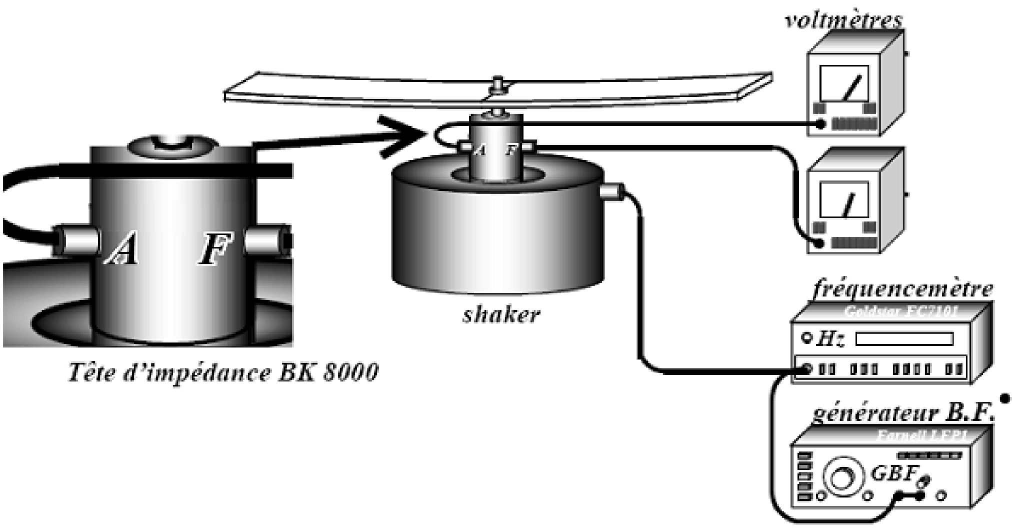
où $\Delta f = f_2 - f_1$

Partie expérimentale

1. Montage expérimental

La lame d'acier, pour commencer, est fixée en son milieu sur le pot vibrant par l'intermédiaire d'une tête d'impédance.

On peut ajuster et mesurer la fréquence de vibration, et ajuster l'amplitude de vibration (essayer ces deux réglages).



La tête d'impédance est un capteur qui délivre 2 signaux distincts:

- par sa borne F, un signal proportionnel à la Force transmise par le pot vibrant à la lame,
- par sa borne A, un signal proportionnel à l'Accélération subie par le milieu de la lame.

La fiche technique de la tête d'impédance, disponible en salle de manipulation, contient les facteurs de proportionnalité c.à.d. la sensibilité.

Les amplitudes des signaux sont mesurées par des Voltmètres.

2. II.1. Étude de la lame d'acier :

2.1. II.1.1. Mesure de la fréquence de résonance (méthode « sensorielle »)

Faire varier régulièrement la fréquence de vibration du pot vibrant, avec une amplitude de vibration moyenne,

et observer que des phénomènes de résonance se produisent à diverses fréquences: autour de $20Hz$ pour la première résonance, autour de... et de... Hz pour la seconde, la troisième fréquence de résonance et la quatrième.

Les formules (2) peuvent aider à trouver ces fréquences.

On observe avec ses yeux pour la première fréquence de résonance, avec ses yeux et ses oreilles pour la seconde, avec ses oreilles seulement pour la troisième.

- Mesurer les 4 premières fréquences de résonance et décrire vos observations du phénomène de résonance alors produit.

2.2. II.1.2. Mesure de la fréquence de résonance (méthode « physique »)

Pour la suite, observer attentivement les voltmètres qui mesurent la force et l'accélération

et remarquer qu'au voisinage de la fréquence de résonance, la force est maximale et l'accélération minimale.

Pour la première fréquence de résonance, c'est un véritable spectacle si on prend la peine de l'observer.

À la fréquence de résonance, l'amplitude de la vibration de la tête d'impédance est quasi nulle (on le voit et on le mesure).

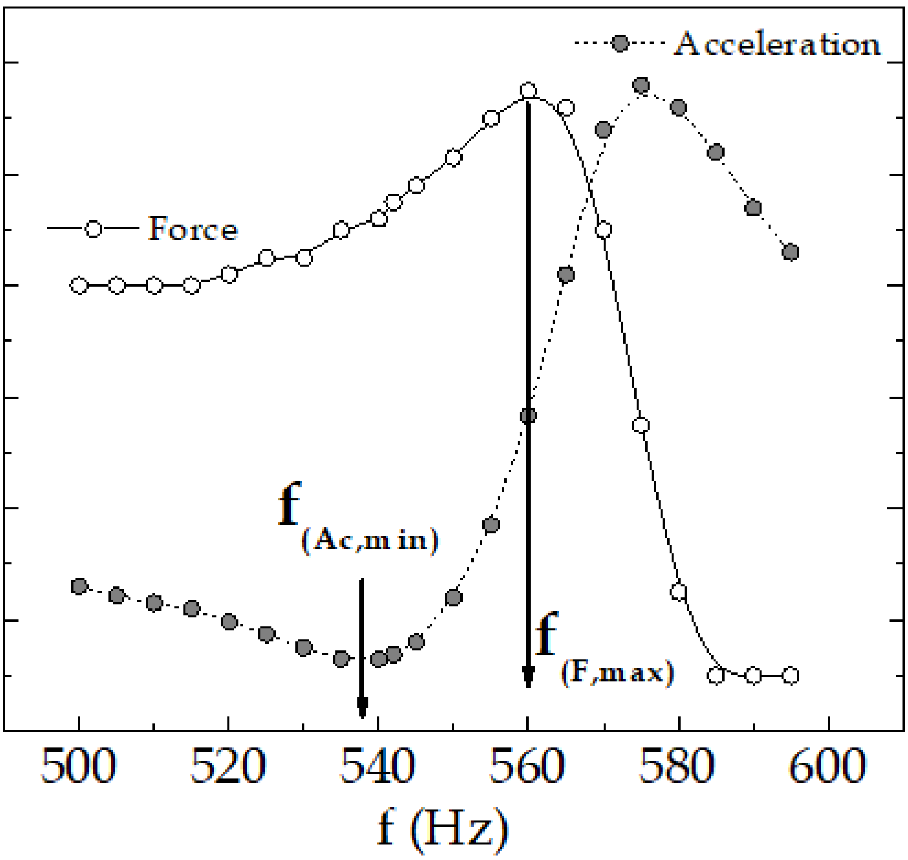
Alors que l'amplitude de vibration de l'extrémité de la barre est très grande.

Cette observation est importante pour la suite (la barre de PVC), car les yeux et les oreilles ne seront alors d'aucune utilité.

La seule aide sera les voltmètres (en fait, l'observation sensorielle des modes propres de vibration dépendent de la géométrie de la barre).

On a donc une méthode de mesure de la fréquence de résonance :

Méthode de mesure de la fréquence de résonance :



Faire varier régulièrement la fréquence de vibration et observer attentivement les voltmètres qui mesurent la force (F) et l'accélération (A) au voisinage de la fréquence de résonance, la force est maximale et l'accélération est minimale (comme indiqué dans la figure ci-dessus).

Très exactement, la fréquence de résonance, f_r est comprise entre les fréquences $f_{ac,min}$ et $f_{F,max}$.

$$f_r = \frac{f_{ac,min} + f_{F,max}}{2}$$

- utiliser les formules (2) pour faciliter cette recherche :ces formules peuvent être utilisées pour trouver les fréquences suivantes, mais elles doivent être aussi utilisées pour vérifier que les fréquences observées sont des vrais fréquences de résonance
- Comparer les valeurs de fréquence de résonance ainsi obtenus avec celles mesurées précédemment.

2.3. Vidéos expérimentales

a) lame d'acier 1ère fréquence

[cf. acier 1ère fréquence]

b) lame d'acier 2ème fréquence

[cf. acier 2ème_frequence]

c) lame d'acier 3ème fréquence

[cf. acier_346Hz_3ème_frequence]

d) lame d'acier 4ème fréquence

[cf. acier 4ème frequence]

2.4. II.1.3. Calcul du module d'Young, E, de l'acier

Calculer le module d'Young de l'acier pour les 4 fréquences de résonances observées (utiliser l'expression simplifiée de E).

Comparer avec la valeur donnée par le tableau suivant.

Lame d'acier	m=16,3±0,2 g L=31,3±0,2 cm b=12,3±0,2 mm e=0,69±0,03 mm	Lame de PVC	m=42,5±0,2 g L=25,0±0,2 cm b=24,0±0,2 mm e=5,00±0,03 mm

Matériau	Module d'Young E (module d'élasticité) Unité SI : GPa
Acier	environ 200
Chlorure de polyvinyle	environ 3
Polyuréthane	environ 0,3

Remarque

« Les méthodes dynamiques d'évaluation des coefficients caractéristiques de l'élasticité ne prennent pas en compte les mouvements « visqueux » d'atomes ou de molécules aux grandes vitesses et, de ce fait, donnent des rigidités un peu plus grandes que les méthodes statiques (ex. les essaies de traction)»

Mécanique des matériaux solides, J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat, Dunod, Paris, 3e édition, 2009

3. II.2. Étude de la lame de PVC:

3.1. II.2.1 Mesure de la fréquence de résonance et calcul du module d'Young (module d'élasticité), partie réelle

Placer la lame de PVC sur le pot vibrant en la vissant, AVEC PRÉCAUTION, sur la tête d'impédance.

a) II.2.1.1. Changer régulièrement la fréquence

Changer régulièrement la fréquence de vibration et rechercher les fréquences de résonance, grâce aux voltmètres en utilisant la méthode décrite en II.1.2:

- rechercher et noter les fréquences qui produisent un minimum de l'accélération,
- rechercher et noter les fréquences qui produisent un maximum de la force,
- évaluer d'après ces listes une fréquence de résonance probable,
- vérifier que des phénomènes similaires se produisent à des fréquences qui seraient 6.27 fois, ou 2.80 fois, ou 1.96 fois plus grandes. Si cette vérification est satisfaite, c'est que la fréquence détectée est bien une fréquence de résonance.

b) Videos expérimentales

i) lame de PVC 1ère fréquence

[cf. PVC 1ère_fréquence]

ii) lame de PVC 2ème fréquence

[cf. PVC 2ème_fréquence]

iii) lame de PVC 3ème fréquence

[cf. PVC 3ème fréquence]

iv) lame de PVC 4ème fréquence

[cf. PVC 4ème fréquence]

c) II.2.1.2. À partir des fréquences de résonance

À partir des fréquences de résonance, calculer **la partie réelle du module d'Young** E_r.

- Comparer les valeurs obtenues à chaque fréquence de résonance.
- Quelle est la valeur la plus sûre ?
- Comparer avec la valeur donnée dans le tableau ci-dessus.
- Comparer les résultats obtenus pour les deux matériaux.
- Quel est le plus rigide ? Justifier.

3.2. II.2.2. Calcul du module d'Young, partie imaginaire

Évaluation de la capacité d'amortissement des vibrations.

Quelques définitions :

a) a) Impédance mécanique :

L'impédance mécanique de l'objet Z est le rapport entre la force F exercée sur l'objet (exprimée en Newton) et la vitesse V de l'objet (exprimée en mètres par secondes) :

$$Z = \frac{F}{V}$$

b) b) Courbe de résonance :

Les variations de l'impédance mécanique Z en fonction de la fréquence appliquée, f, pour des fréquences voisines des fréquences de résonance représentent les «courbes de résonance» qui nous permettrons d'évaluer la capacité d'amortissement et la partie imaginaire du module d'Young (voir section I.2.2.).

c) c) Vitesse :

pour chaque valeur de fréquence, f, la valeur de la vitesse (m/s) est donnée par :

$$V = \frac{A}{\omega} = \frac{A}{2\Pi f}$$

où A est l'accélération (ms^{-2}).

Pour obtenir l'accélération en ms^{-2} il faut tenir en compte de la sensibilité du capteur d'accélération figurant sur la fiche technique.

d) II.2.2.1. Obtention des courbes de résonance

Effectuer les mesures nécessaires pour tracer les courbes de résonance pour des fréquences voisines de la première fréquence de résonance (et de la deuxième).

Pour cela vous pouvez utiliser l'oscilloscope disponible en salle de TP :

branchez l'accélération à la voie CH1 et la force à la voie CH2.

Dresser un tableau de mesures :

$f(Hz)$	$F(mV)$	$A(mV)$	$F(N)$	$A(ms^{-2})$	$V(m.s^{-1})$	$Z(kg.s^{-1})$
...						
...						

N'oubliez pas d'exprimer la force en Newton et l'accélération en $m.s^{-2}$ grâce à la sensibilité du capteur de force (Force gauge) et du capteur d'accélération figurant sur la fiche technique affichée en salle.

Tracer la courbe de résonance.

e) Vidéo expérimentale

[cf. lame d'acier 2 ème fréquence : mesures à l'ocillo]

f) Video expérimentale light

g) II.2.2.2. Calcul du module d'Young, partie imaginaire

- Calculer la capacité d'amortissement et la partie imaginaire du module d'Young par la méthode de la bande passante. (Comparer les valeurs obtenues pour les deux fréquences de résonance).
- L'acier possède-t-il une capacité d'amortissement plus élevée ou plus faible que le PVC?

  Dans ces conditions, si vous aviez voulu mesurer la capacité d'amortissement de la barre d'acier avec la technique des courbes de résonance et de mesure de largeur à -3dB, quel genre de courbe auriez-vous obtenu? Plus étroites ou plus élargies?

Conclure.

h) II.2.2.3. Vérification de la méthode de mesure de la fréquence de résonance

- Pour vérifier la méthode de mesure de la fréquence de résonance, tracer sur le même graphe les courbes qui représentent la Force F (axe vertical de gauche) et l'Accélération A (axe vertical de droite) en fonction de la fréquence f pour des fréquences voisines de la première et deuxième fréquence de résonance de la lame de PVC.
- Conclure...
- Calcul de l'incertitude sur E :

  Écrire l'expression du module d'Young E déterminée à partir de la formule (1), en fonction des variables non corrélées : fréquence f, longueur L, masse m, largeur b et épaisseur e.

  Pour calculer l'incertitude sur E on utilise la loi de propagation d'incertitudes

  $$(u_c(y))^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 (u(x_i))^2$$

- Démontrer la relation entre E et son incertitude, U(E) :

  $$\left(\frac{U(E)}{E}\right)^2 = 2\left(\frac{U(f)}{f}\right)^2 + 3\left(\frac{U(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{U(b)}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{U(e)}{e}\right)^2$$

avec $U(f), U(L), U(m), U(b)$ et $U(e)$ l'incertitude sur f, L, m, b et e

Animation

IV

L'animation suivante vous permet de manipuler l'oscillateur de Pohl...

[cf. Module d'Young]

accès direct :

https://www.geogebra.org/m/rvrdwtkd