Moments d'inertie

Version papier téléchargeable

Table des matières

Objectifs

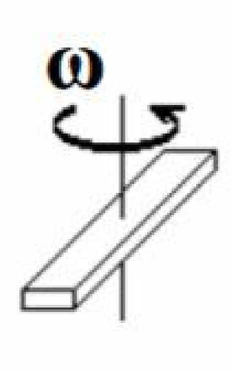
Le but de ce TP est :

1. Déterminer expérimentalement le moment d'inertie de différents solides homogènes par rapport à un axe de rotation, en mesurant la période T des oscillations de torsion du solide autour d'un axe de rotation.
2. Déterminer théoriquement le moment d'inertie de différents solides homogènes par rapport à un axe de rotation en appliquant le théorème de Huygens, et de comparer avec la valeur obtenue expérimentalement à partir de la mesure de la période des oscillations
3. Vérifier la validité de la mesure et du calcul en considérant les incertitudes respectives.

Partie théorique

La notion de moment d'inertie est primordiale lorsqu'on étudie la dynamique d'un solide indéformable en rotation : l'application du théorème du moment cinétique fait immédiatement apparaître cette quantité.

1. 1 Définition du moment d'inertie



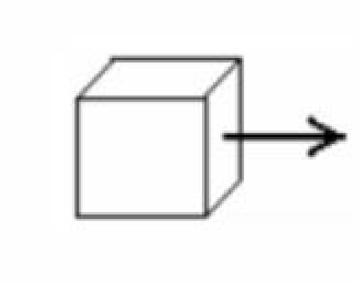
Le moment d'inertie, I d'un objet est la grandeur physique permettant de décrire le mouvement de rotation autour d'un axe que subit cet objet

- un objet de moment d'inertie $I = 1Kg.m^2$, soumis à un couple moteur de $1N.m$, subit une accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ de $1rad.s^{-2}$:

  $\Gamma = I.\ddot{\alpha}$

- un objet de moment d'inertie de $I = 1Kg.m^2$, animé d'une vitesse de rotation, $\dot{\alpha} = \omega$, de $1rad.s^{-1}$, possède une énergie cinétique de rotation de $0.5J$:

  $$E_{cR} = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Le parallèle avec la masse inertielle est parfait : la masse m d'un objet est la grandeur physique qui permet de décrire le mouvement de translation que subit cet objet :

- un objet de masse $1Kg$, soumis à une force de $1N$, subit une accélération linéaire de $1m.s^{-2}$:

  $F = m.a$

- un objet un objet de masse $1Kg$, animé d'une vitesse de translation de $1m.s^{-1}$ possède une énergie cinétique de translation de $0.5J$

  $$E_{cT} = \frac{1}{2} m v^2$$

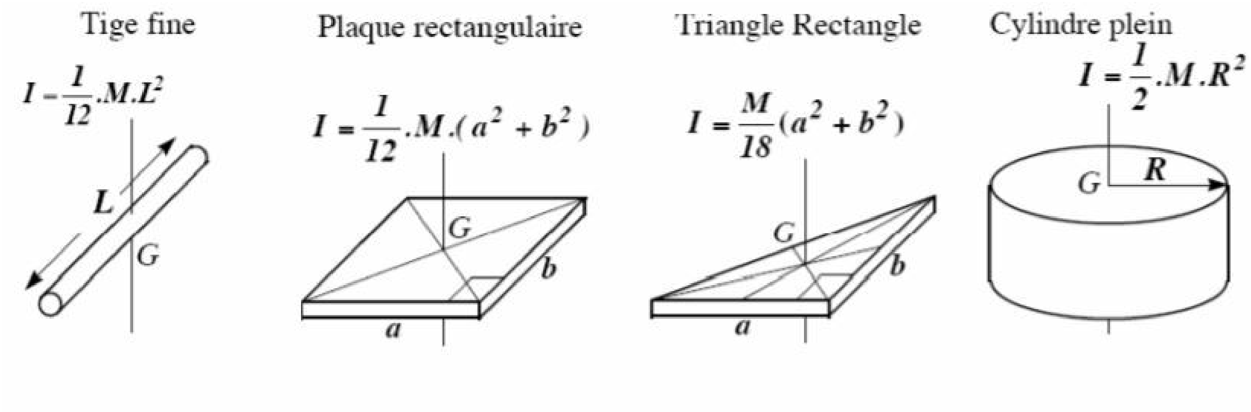
2. 2 Calcul du moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un objet se calcule en décomposant l'objet en N petits objets élémentaires. Un petit objet élémentaire de masse ponctuelle dm, situé à la distance r de l'axe de rotation, possède un moment d'inertie $dI = dm.r^2$.

Le moment d'inertie de l'objet entier est la somme des moments d'inertie de chaque élément :

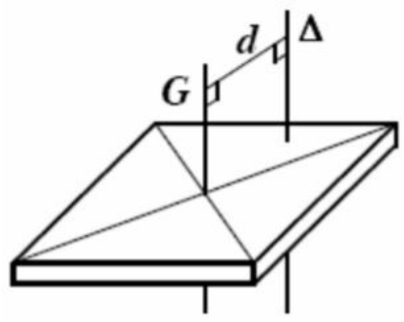
$I = \sum r^2.dm \ ou \ I = \int r^2.dm$

Des considérations de symétrie, pour des objets de forme simple de masse M, permettent d'obtenir les formules classiques (formules (I) ci-dessous) des moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité G, ($I_G = I$ dans les formules (1)).



Formules (1) pour le calcul théorique du moment d'inertie I_G

Pour déterminer le moment d'inertie d'un objet par rapport à un axe quelconque, on utilise le théorème de Huygens.



Théorème de Huygens :

Le moment d'inertie d'un objet, de masse M, par rapport à un axe de rotation quelconque Δ, I_Δ , est la somme

- du moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation parallèle à Δ et passant par le centre de gravité de l'objet, I_G

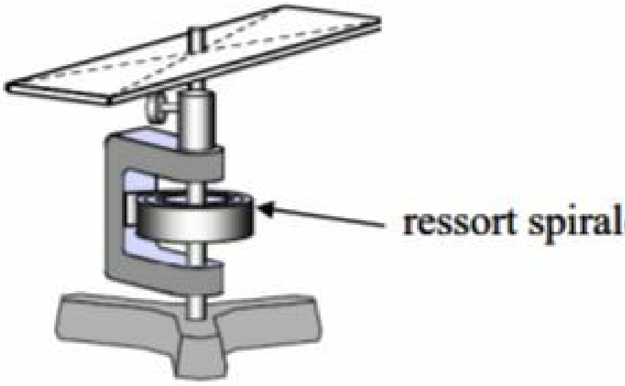
- et du produit de la masse de l'objet par le carré de la distance entre les deux axes, d

$I_\Delta = I_G + M.d^2$ (2)

On peut aussi démontrer que si deux solides S_1 et S_2 tournent autour du même axe Δ, le moment d'inertie du système constitué des deux objets, $I_\Delta(S_1 + S_2)$ est :

$I_\Delta(S_1 + S_2) = I_\Delta(S_1) + I_\Delta(S_2)$ (3), où $I_\Delta(S_1)$ et $I_\Delta(S_2)$ sont leurs moments d'inertie respectif par rapport au même axe Δ.

3. 3 Relation entre le moment d'inertie et la période des oscillations



Le dispositif expérimental de ce TP est constitué du solide à étudier placé sur une balance de torsion oscillante animée par un ressort de rappel en spirale possédant une constante élastique de torsion C qu'il faudra préalablement déterminer.

La mesure de la période d'oscillation de l'objet permettra de mesurer son moment d'inertie.

Le solide est soumis à l'action extérieure d'un ressort à spiral dont l'axe vertical est confondu avec

l'axe de révolution du solide.

Quand le ressort est comprimé grâce à une rotation d'un angle θ, il développe un couple de rappel qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre.

Le couple de rappel Γ du ressort est la projection sur l'axe de rotation du moment de la force de rappel, i.e, $\Gamma = -C.\theta$, où C est la constante élastique de torsion caractéristique du ressort.

L'unité de C est donc $N.m/rad$.

Une fois que les deux axes (du solide et celui du ressort) sont verticaux et coïncident, le solide n'est soumis qu'au couple de rappel du ressort.

La projection sur l'axe de rotation du moment cinétique du solide est égale à $I.\theta$.

Le théorème du moment cinétique, projeté sur l'axe de rotation donne :

$$I.\ddot{\theta} = -C.\theta \iff \ddot{\theta} + \frac{C}{I}.\theta = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

donc la période T d'oscillation de torsion est donnée par

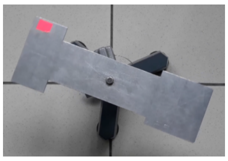
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \text{ (1)}$$

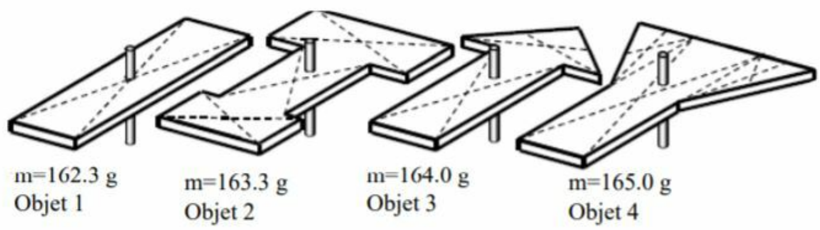
Si on connaît C, la mesure de la période T permet donc d'obtenir le moment d'inertie I.

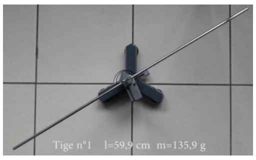
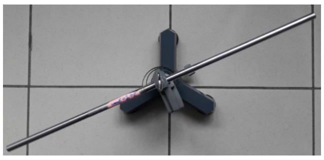
Partie expérimentale

1. 1 Matériel disponible

- Plusieurs objets, réalisés en métal d'épaisseur uniforme, sont disponibles :

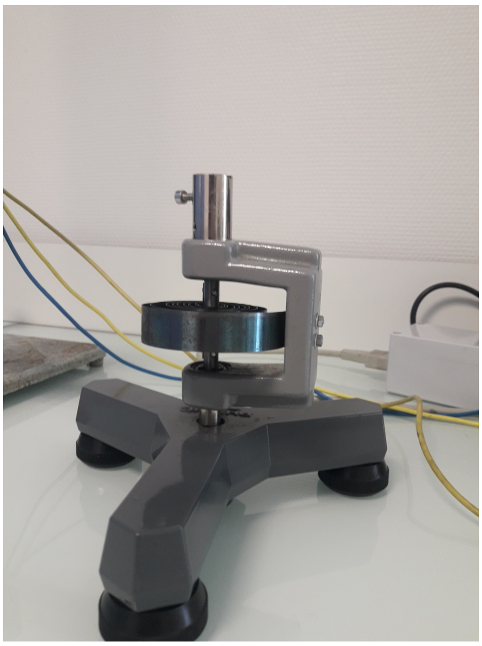
			

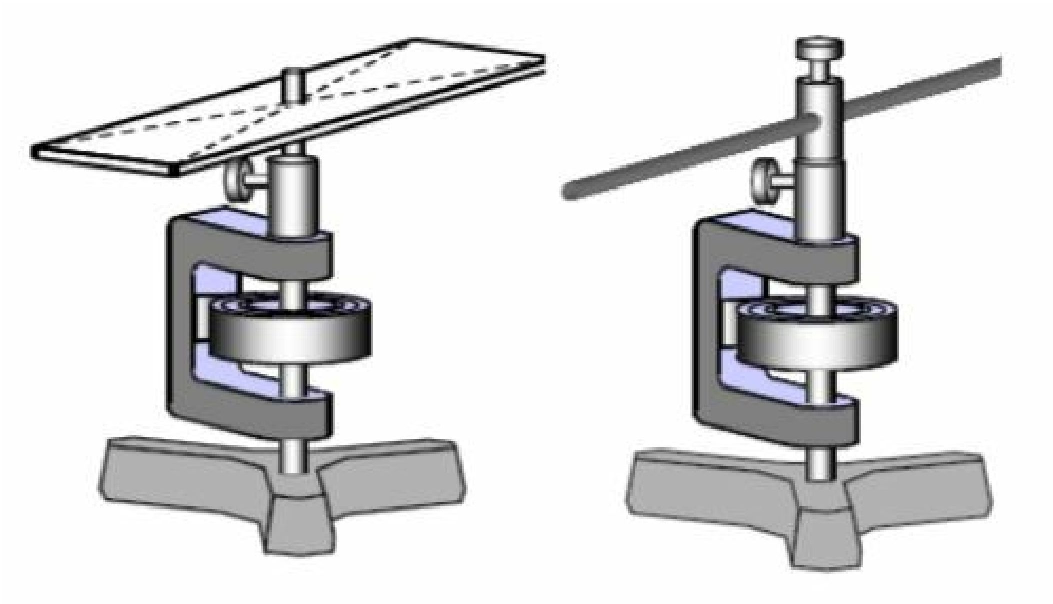


Vous avez aussi deux tiges étalon métalliques :

- Tige n°1 de masse $m1 = 135.9g$ et longueur $L1 = 59,9cm$;
- Tige n° 2 de masse $m2 = 307.0g$ et longueur $L2 = 50cm$
- Un chronomètre





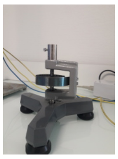
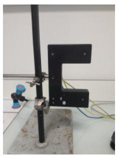
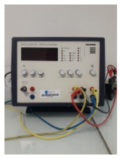
- Une balance de torsion :

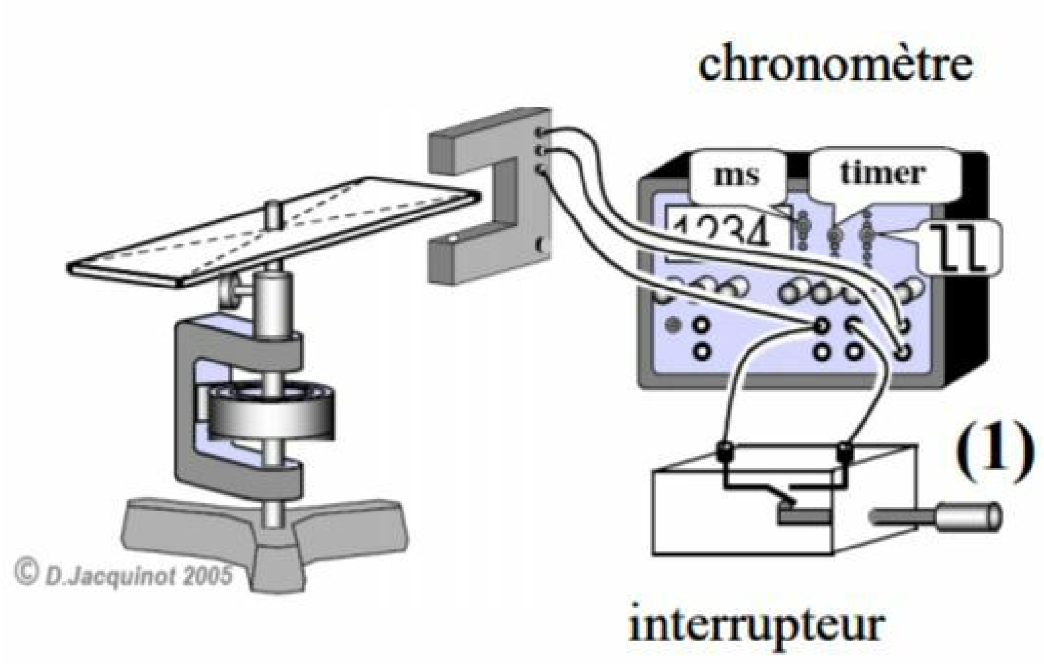
  Lorsqu'on tourne l'axe, le ressort en spirale exerce un couple de rappel (i.e., un couple qui tend à faire revenir l'axe dans sa position initiale) proportionnel à l'écart entre la position d'équilibre et la déviation de l'équipage mobile solidaire de l'objet en mouvement.

2. 2- Protocole expérimental

Attention

Pour ne pas détériorer le ressort en spirale, il ne faut absolument pas écarter la balance de plus de 120° de sa position d'équilibre.



Mesure des périodes d'oscillation :

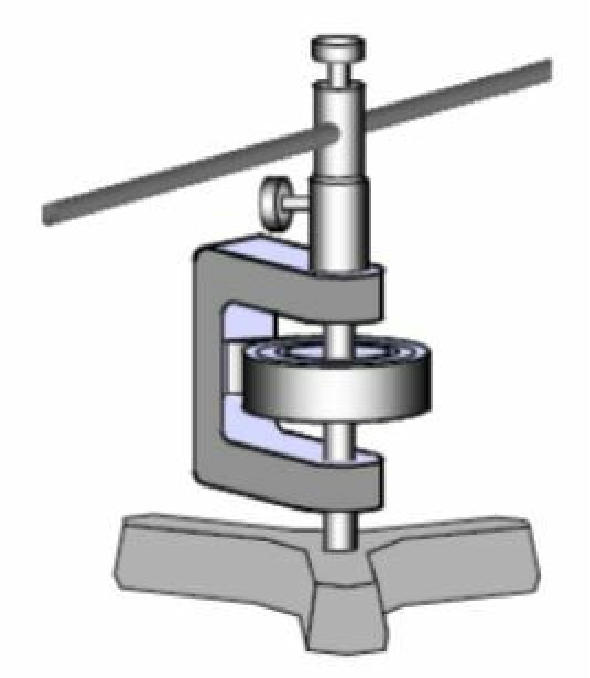
La mesure des périodes d'oscillation se fait à l'aide d'une barrière lumineuse connecté à un chronomètre réglé et relié comme indiqué ci-contre :

- appuyer sur FONCTION pour allumer le voyant « timer »
- appuyer sur TRIGGER pour allumer ZZ

Quand le bouton START est allumé et l'interrupteur est ouvert (position 1): le chronomètre démarre à la première interruption détectée par la barrière.

Les autres interruptions n'affectent pas le chronomètre.

Dès que l'interrupteur est fermé (le levier de commande vers l'avant), la prochaine interruption arrête le chronomètre.



Mesures préliminaires de la période :

Placer la tige métallique sur la balance de torsion, exactement fixée en son milieu.

Tourner la tige d'un angle entre ~ 60 et 90° de manière à comprimer le ressort (sens trigonométrique).

Lâcher la tige et mesurer sa période d'oscillation

Attention

Une période correspond à un aller et retour de la tige, donc à deux passages devant la cellule.

Compter 10 périodes (10T) d'oscillations successives.

S'habituer ainsi au bon chronométrage des périodes d'oscillations, indispensable pour la suite de la manipulation.

3. 3- Mesures et calculs

3.1. 3.1- Calibration de la balance de torsion. Détermination de la constante de torsion C

Il faut d'abord vérifier la validité des mesures obtenues et en apprécier la précision.

Pour cela, on utilise les deux tiges fines qui servent ici d'étalons : on les place sur la balance de torsion, fixées exactement en leur milieu, et on mesure les périodes d'oscillations.

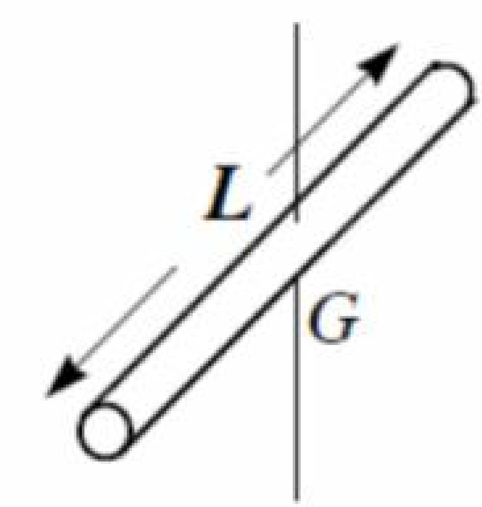
a) 3.1.1 Mesure de 10 périodes d'oscillation

Mesurer dix fois les 10 périodes oscillations ($10T$) des deux tiges.

Calculer la moyenne de cette période et son incertitude; finalement calculer la période d'oscillation de deux tiges, $T_1 \pm U(T_1)$ et $T_2 \pm U(T_2)$.

Procédez avec soin, car de la détermination correcte de C dépendent tous les autres résultats de ce TP

b) 3.1.2 Calculer des moments d'inertie des 2 tiges



Calculer le moment d'inertie, I_1 et I_2, des deux tiges, à partir de la relation donnant le moment d'inertie d'une tige homogène de longueur L autour d'un axe lui étant perpendiculaire et passant par son centre de gravité (G) :

$$I_{tige,G} = \frac{ML^2}{12}$$

c) 3.1.3 Démonstration

À partir de la relation (1) démontrer que :

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$$

Cette relation nous permet d'évaluer la précision des mesures :

i) 3.1.3- a Calcul de l'écart relatif

Calculer le rapport des périodes et le rapport des racines carrés des moments d'inertie des deux tiges.

Pour évaluer l'accord ou éventuel désaccord, calculer l'écart relatif entre $\frac{T_2}{T_1}$ et $\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$

L'accord entre les rapports est-il satisfaisant ? Expliquer le désaccord.

Remarque

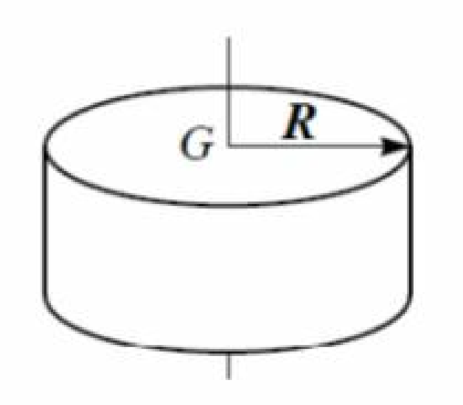
Les périodes des oscillations mesurées avec la balance de torsion représentent le temps des rotations de l'objet et de l'équipage mobile sur laquelle l'objet est placé. Ainsi, le moment d'inertie I dans l'équation (1) doit être augmenté du moment d'inertie de l'équipage mobile de la balance de torsion :

$$I = I_{tige} + I_{équipage}$$

ii) 3.1.3- b Calcul du moment d'inertie de l'équipage mobile

Calculer le moment d'inertie de l'équipage mobile.

Pour simplifier, nous allons considérer que cet équipage mobile est constitué d'un cylindre d'acier (masse volumique $\approx 8000 Kg/m^3$) de longueur $15 cm$ et rayon de $12 mm$.



Le moment d'inertie d'un cylindre plein (de masse M et rayon R) par

rapport à l'axe passant par son centre de masse est donné par l'expression :

$$I_{cylindre,G} = \frac{MR^2}{2}$$

iii) 3.1.3- c Ajout du moment d'inertie de l'équipage mobile

Ajouter le moment d'inertie de l'équipage mobile aux moments d'inertie des deux tiges calculées au point II.3.1.2)

Calculer le rapport des racines carrées des nouvelles valeurs.

Calculer l'écart relatif entre les deux rapports. Est-il plus satisfaisant ?

iv) 3.1.3- d Constante de torsion C

Grâce à la relation (1), déterminer la valeur de la constante de torsion, C, du ressort en spiral ainsi que son incertitude, en admettant que les incertitudes sur la masse et la longueur sont négligeables.

En déduire que par la suite, les moments d'inertie I seront déduits de la période d'oscillation T par la relation

$I_{objet+équipage} = k.T^2$ (équation 5)

Donner la valeur numérique de k (ainsi que son incertitude).

3.2. 3.2. Détermination du Moment d'inertie des objets

a) 3.2.1 Détermination expérimentale

Attention

Pour mesurer la période d'oscillation d'un solide, celui-ci doit être lancé en le tournant d'un angle entre 60^o et 90^o et de manière à comprimer le ressort : jamais l'inverse.

Pour de raisons de sécurité et pour ne pas endommager le ressort ne pas le tourner à plus de 180°.

Avec les objets disponibles, du plus simple au plus compliqué, la manipulation consiste à :

- Placer l'objet sur la balance de torsion et mesurer la période d'oscillation (10 périodes).
- Calculer le moment d'inertie expérimental, I_{exp}, de l'objet ainsi que son incertitude.

Rappel

Pour le calcul de I_{exp} de l'objet on doit tenir en compte du moment d'inertie de l'équipage mobile:

$I_{exp,objet} = I_{objet+équipage} - I_{équipage}$

où $I_{objet+équipage} = k.T^2$ (équation 5)

b) 3.2.2 Moment d'inertie théorique des objets

Pour chacun des objets, mesurer les dimensions de l'objet, le décomposer en parties simples, et calculer son moment d'inertie théorique, $I_{theorique}$, à l'aide du théorème de Huygens et des formules (1).

c) 3.2.3 Calcul des incertitudes

Calculer pour les objets 1 et 3, l'incertitude sur le moment d'inertie expérimental et théorique en fonction de l'incertitude (que vous apprécierez à votre initiative) sur les mesures de périodes, de la masse et des dimensions de l'objet...

En déduire les incertitudes sur le moment d'inertie théorique des objets 2, 4.

d) Vidéos expérimentales

i) Oscillations de la tige 1

Tige 1

[cf. Oscillations tige1]

ii) Oscillations de la tige 2

Tige 2

[cf. Oscillations tige 2]

iii) Oscillations de l'objet 1

Objet 1

[cf. Oscillations objet 1]

iv) Oscillations de l'objet 2

Objet 2

[cf. Oscillations objet 2]

v) Oscillations de l'objet 3

Objet 3

[cf. Oscillations objet 3]

vi) Oscillations de l'objet 4

Objet 4

[cf. Oscillations objet 4]

e) Tableau récapitulatif

Dresser un tableau récapitulant les résultats théoriques et expérimentaux (avec leurs incertitudes) et comparer les deux valeurs obtenues (calculer les écarts relatifs).

Conclure.

Manipulation virtuelle

L'animation suivante vous permet de manipuler différents objets pour en déterminer le moment d'inertie.

[cf. Moments d'inertie]

Attention

Avant de faire des mesures de temps avec le chronomètre de l'animation, vous devez synchroniser la vitesse de l'animation avec le chronomètre de l'animation à partir de la vitesse préréglée!

(En effet cette synchronisation dépend de la machine que vous utilisez pour visionner l'animation.)

lien direct : https://www.geogebra.org/m/ae6tcenh

Réglages :

Commencer par régler le temps d'oscillations des objets qui peut dépendre de votre machine.

- Sélectionner « réglage temps ».

  La constante de torsion est alors égale à 0,024 N.m/rad et le moment d'inertie est égal à 0,0038 kg.m^2.

  La période calculée des oscillations de la tige fictive vaut alors 2,5 s.
- En mesurant 10 oscillations, ajuster la vitesse de l'animation pour trouver, à l'aide de votre chronomètre, une période égale à 2,5s.

(remarque : vous pouvez utiliser les flèches gauche et droite pour affiner le réglage)

Dans cette animation vous avez la possibilité :

de choisir l'équipage mobile à placer sur le ressort spiral :

- Tige L1
- ou Tige L2
- ou Objet 1
- ou Objet 2
- ou Objet 3
- ou Objet 4

en cliquant sur les cases correspondantes.

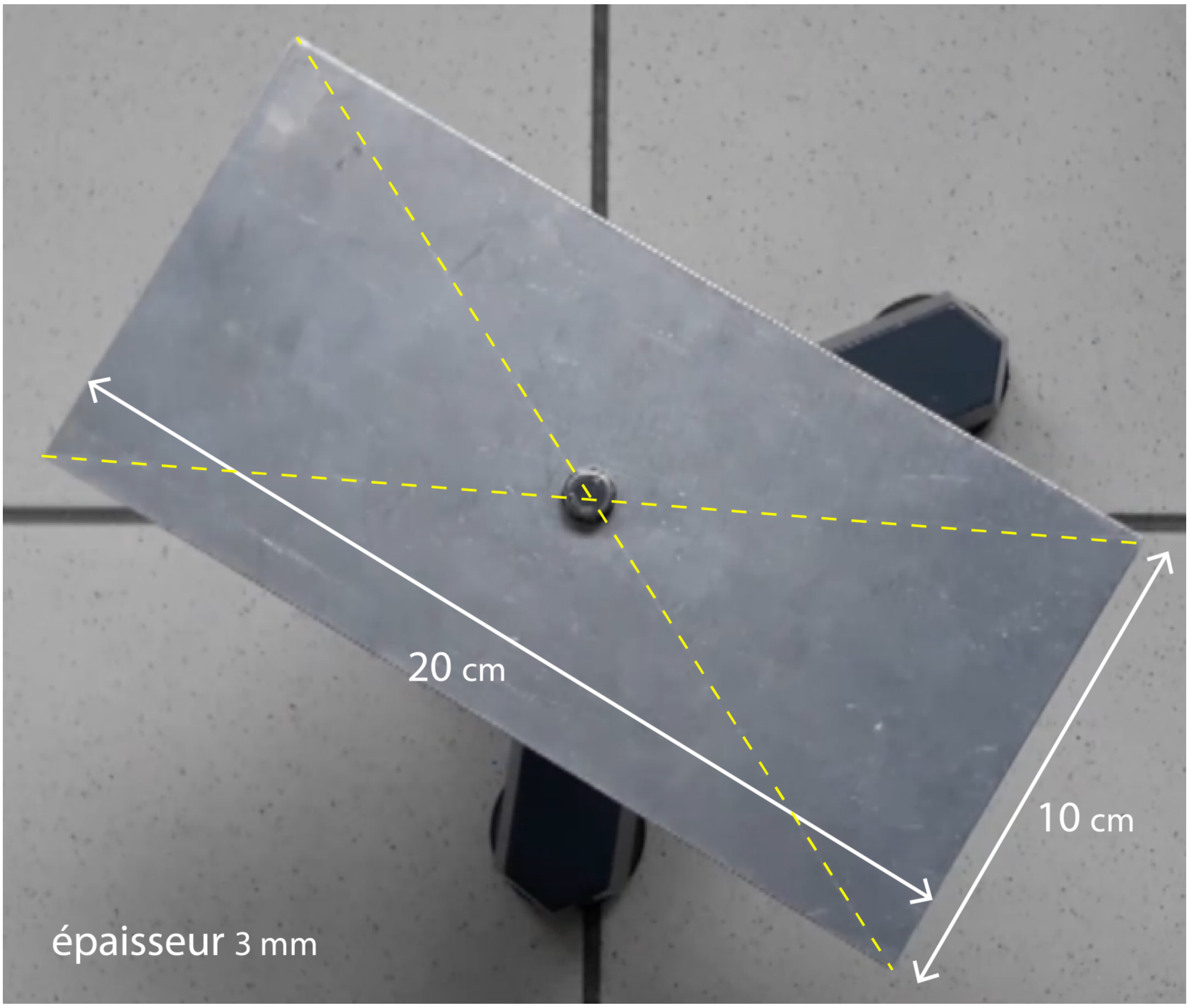
A l'aide de votre chronomètre mesurer la durée de 10 oscillations et en déduire la période puis le moment d'inertie correspondant.

Vous pouvez alors vérifier votre calcul en cliquant sur « affichage moment inertie ».

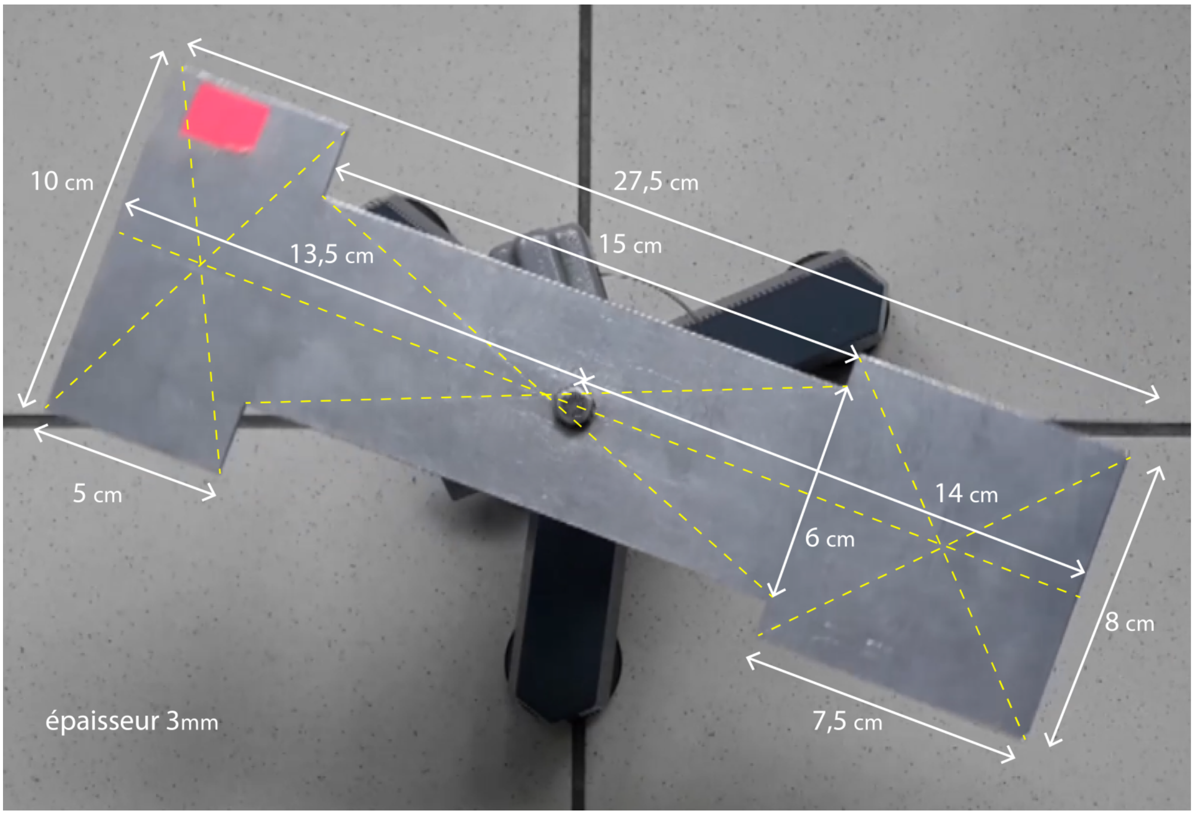
Remarque : je recommande le chronomètre « Hybrid Stopwatch & Timer » à télécharger (Android)

Annexe

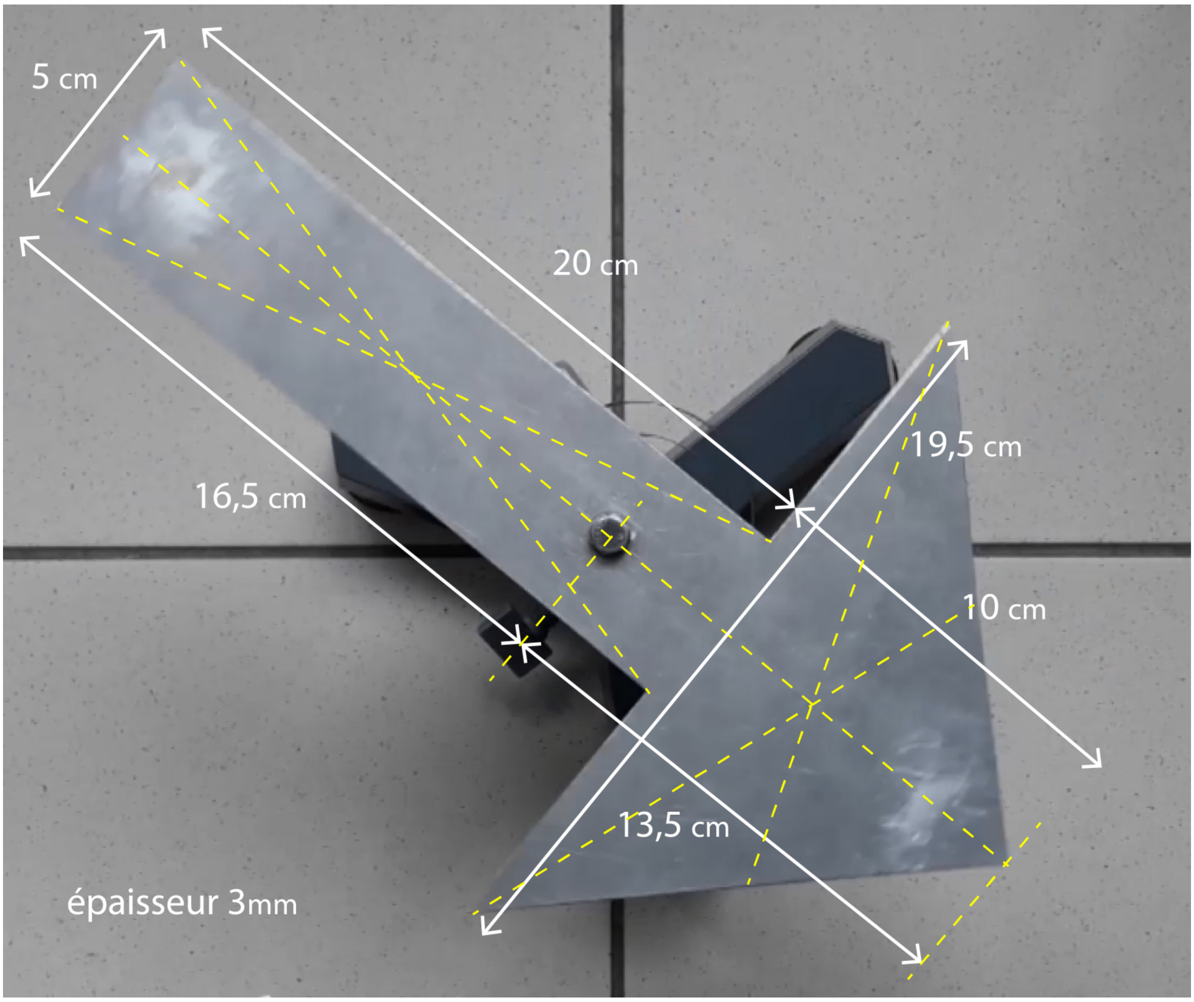
1. Dimensions objet 1



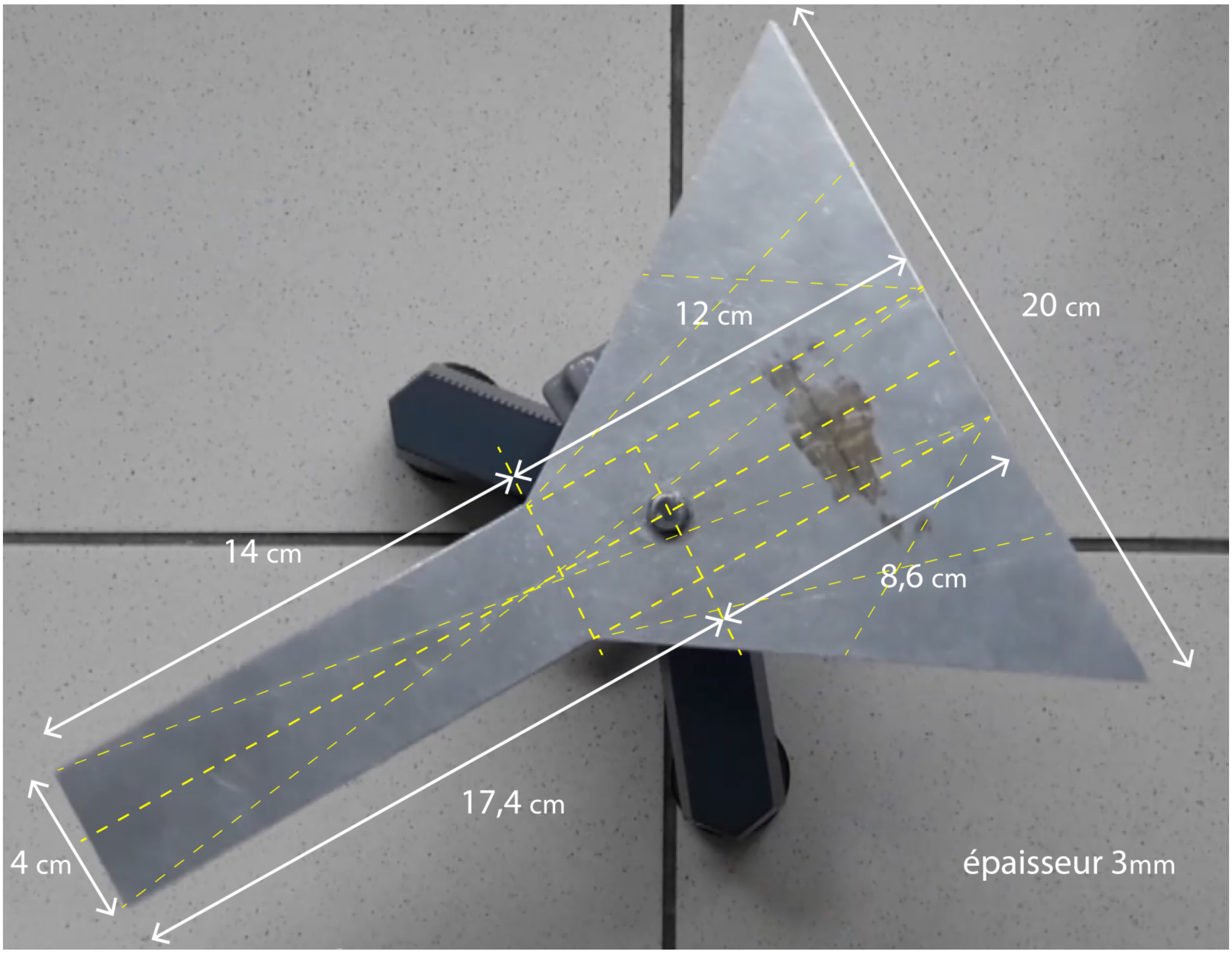
2. Dimensions objet 2



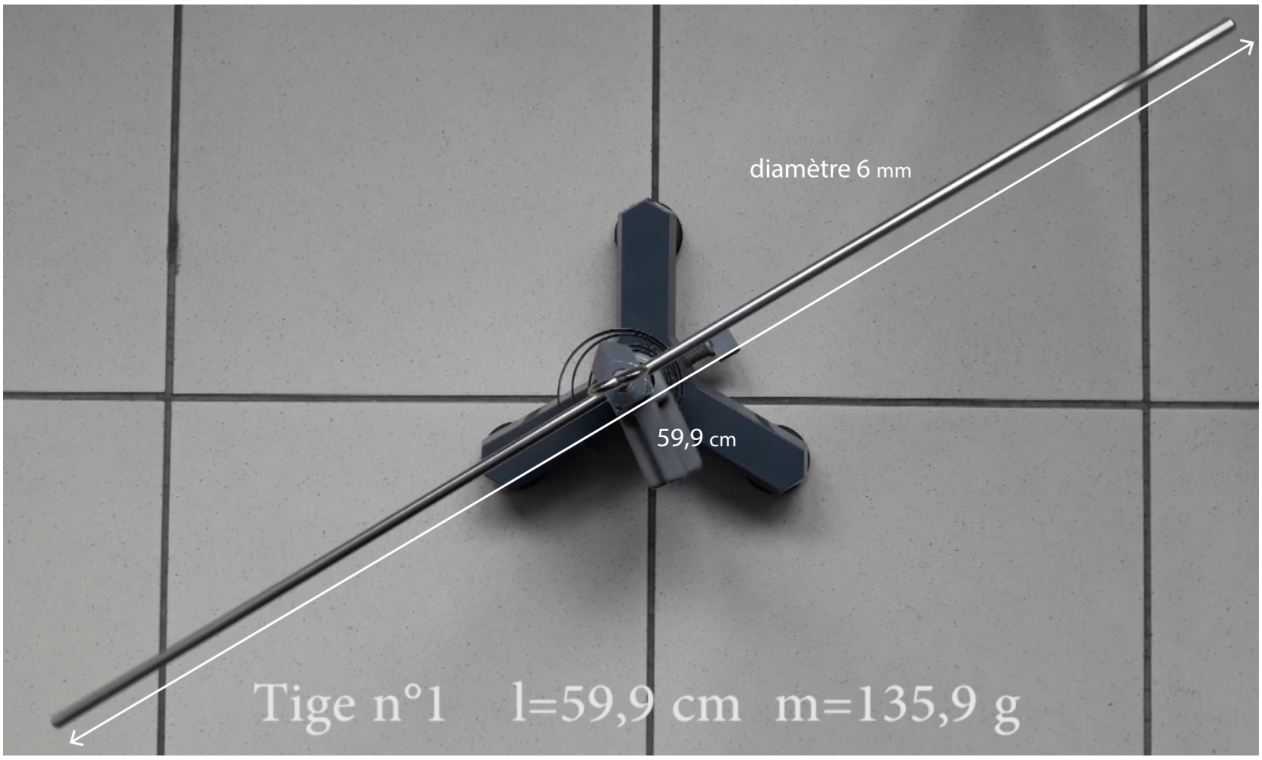
3. Dimensions objet 3



4. Dimensions objet 4



5. Dimensions tige 1



6. Dimensions tige 2