Etude du pendule pesant

Version papier téléchargeable

Table des matières

Objectifs du TP

Dans ce TP on se propose de déterminer le moment d'inertie J_0 d'un pendule pesant sans masse additionnelle, par deux méthodes basées sur la mesure des périodes d'oscillation (T) en fonction de masses additionnelles (m_1 et m_2) :

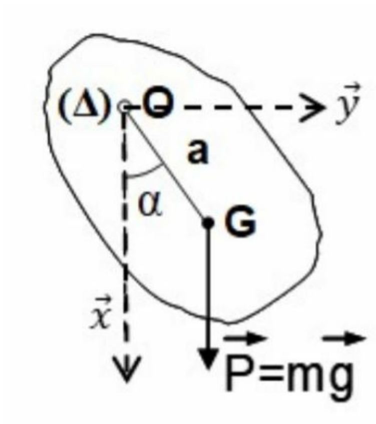
- Méthode 1 : à partir de la représentation graphique de T^2 en fonction de $\frac{1}{m_2}$
- Méthode 2 : à partir de la représentation graphique de T^2 en fonction de ($m_1 + m_2$)

[cf. Objectifs]

Partie théorique

1. Expression de la période T des oscillations d'un pendule pesant :

Par opposition au pendule simple, dont toute la masse est supposée concentrée en un seul point, un pendule pesant est constitué d'un solide pouvant osciller autour d'un axe fixe (Δ) passant par l'un de ses points (par exemple, la balançoire avec l'enfant ou le balancier de l'horloge).



On appelle :

- G, le centre de gravité du pendule de masse totale m ;
- O, la position de l'axe de rotation (Δ) normal à la feuille (autrement dit, O est le point correspondant à l'intersection de l'axe de rotation Δ avec le plan des oscillations de G);
- a, la distance OG ;
- α, l'écart angulaire de OG par rapport à la verticale ;
- J, le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation (Δ).

Appliquons le théorème du moment cinétique (TMC) par rapport à O : la somme des moments des forces appliquées au pendule est égale à $J.\ddot{\alpha}$, où $\ddot{\alpha} = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ est l'accélération angulaire du mouvement d'oscillation.

Dans le cas théorique d'un pendule se déplaçant sans frottement, les forces appliquées au système défini par le pendule sont :

- Le poids du pendule, dont le moment par rapport à O est un vecteur exprimé par $\overrightarrow{OG} \wedge m.\vec{g}$ de norme $mga.sin\alpha$ mais avec un signe -, car ce vecteur "rentre" dans la feuille;

- La force de réaction du support qui passe par O, non dessinée ci-dessus et dont le moment par rapport à O est nul (car sa droite d'action coupe toujours l'axe de rotation Δ)

Le TMC fournit ainsi l'équation différentielle du mouvement : $J.\ddot{\alpha} = -mga.(sin\alpha)$

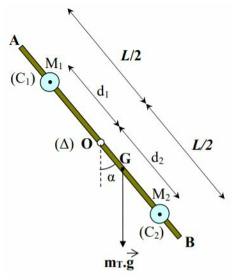
Cette équation n'a pas de solution analytique, sauf si l'angle α reste petit (oscillations de faibles amplitudes). Dans ce cas, on peut remplacer par et l'équation devient $J.\ddot{\alpha} + mga.\alpha = 0$

dont la solution est $\alpha(t) = \alpha_M.cos(\omega t),\ avec\ \omega = \sqrt{\dfrac{mga}{J}}$

en supposant que le pendule est lâché sans vitesse initiale avec un écart angulaire α_M à l'instant $t = 0$.

La période de l'oscillation est alors $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$ (1)

2. Application au pendule utilisé dans le TP



Le pendule à étudier est constitué d'une tige et d'autres accessoires dont deux barreaux horizontaux placés à la même distance de l'axe de rotation.

Pour équilibrer le pendule à l'horizontal on utilise une masse d'équilibrage (M_0) placée dans le barreau situé à côté du cylindre C_1.

La figure ci-dessus est une simplification du schéma du système à étudier : on « oubliera » les accessoires et on parlera seulement de la « tige »...

La tige AB de longueur L de masse m tourne autour de l'axe (Δ) qui passe par son milieu O.

Deux masselottes cylindriques (C_1) et (C_2) sont fixées dessus, aux points M_1 et M_2, à des distances respectives de $O : OM_1 = d_1$ et $OM_2 = d_2$. Les masses et rayons des cylindres (C_{1}) et (C_{2}) sont

respectivement m_1, r_1, m_2 et r_2.

On appelle G le centre de masse du pendule complet (« barre» +cylindres), m_T sa masse totale $(m_T = m + m_1 + m_2)$, J_T son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ), et on pose $OG = a$.

La période d'oscillation de l'équipage est alors donnée par la relation (1) : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_T}{m_T ga}}$.

a) Expression de la distance $OG = a$:

On utilise la relation générale vectorielle donnant la position, par rapport à un point O, du

barycentre G de plusieurs masses $m_1, m_2, ...m_P$ placées aux points $A_1, A_2, ...A_P$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ... + m_P\overrightarrow{OA_P}}{m_1 + m_2 + ... + m_P}$$

, ou encore

$$m_T\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ... + m_P\overrightarrow{OA_P}$$

Appliquée au pendule du TP, cette relation devient:

$$m_T\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m\overrightarrow{OO}$$

ce dernier terme étant nul puisque le centre de masse de la barre (plus accessoires) de masse m est précisément le point O.

Les vecteurs $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OM_1}\ et\ \overrightarrow{OM_2}$ sont colinéaires, on peut donc les remplacer par leurs mesures algébriques: en posant $\overline{OG} = a,\ \overline{OM_1} = -d_1\ et\ \overline{OM_2} = d_2$, on obtient l'expression de $m_T.a$:

$m_T.a = m_2.d_2 - m_1.d_1$. (2)

b) Expression du moment d'inertie J_T par rapport à O :

Les moments d'inertie par rapport à un même point s'additionnent, donc on peut écrire

$$J_T = J_0 + J_{(C_1)/O} + J_{(C_2)/O}$$

où J_0 est le moment d'inertie du pendule non chargé (sans les cylindres) c'est-à-dire, de l'ensemble tige plus accessoires (notamment les deux barreaux horizontales que supportent les cylindres).

Pour calculer les moments d'inertie de chaque cylindre par rapport à O, on applique le **théorème de Huygens**:

Pour un solide de masse m et dont le moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité G est J_G, le moment d'inertie $J_{/O}$ par rapport à un axe passant par un point O quelconque est donné par :

$$J_{/O} = J_G + m.OG^2$$

Ainsi, si on appelle J_1 et J_2 les moments d'inertie des deux cylindres par rapport à leur propre axe de symétrie, on obtient :

$$J_{(C1)/O} = J_1 + m_1.d_1^2,\ avec\ J_1 = \frac{1}{2}m_1.r_1^2,$$

$$J_{(C2)/O} = J_2 + m_2.d_2^2,\ avec\ J_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2.$$

Le moment d'inertie JT du pendule a finalement pour expression :

$$J_T = J_0 + J_1 + J_2 + m_1.d_1^2 + m_2.d_2^2 \text{ (3)}$$

c) Expression de la période T du pendule pesant :

En reportant dans la relation (1) les expressions de $m_T.a$ et de J_T qui viennent d'être obtenues, on obtient sans difficulté :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_1 + m_1d_1^2 + m_2d_2^2}{(m_2d_2 - m_1d_1)}} \text{ (4)}$$

3. Application à la détermination du moment d'inertie J0 du pendule pesant sans masse additionnelle (« pendule pesant à vide »)

3.1. Première méthode :

On enlève le cylindre (C_1) et on ne place sur la barre que le cylindre (C_2).

La relation (4) devient avec $m_1 = 0$ et $J_1 = 0$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{m_2d_2g} + cte}$$

♦**Question 1** : En remplaçant dans la relation (4) J_2 par son expression en fonction de m_2 et de r_2

démontrer que cette constante est égale à :

$$\frac{r_2^2}{2.d_2.g} + \frac{d_2}{g}$$

On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{m_2d_2g} + \frac{r_2^2}{2d_2g} + \frac{d_2}{g}} \text{ (5),}$$

ou encore, en élevant au carré :

$$T^2 = A.\frac{1}{m_2} + B \text{ (5b)}$$

♦**Question 2** : Démontrer que

$$A = \frac{4\pi^2 J_0}{d_2 g} \text{ et } B = \frac{2\pi^2 r_2^2}{d_2 g} + \frac{4\pi^2 d_2}{g} \text{ (5b, 5c)}$$

Noter que dans le cas présent $d_1 = d_2 = d$, donc $A = ...et\ B = ...$

La loi reliant le carré de la période T avec l'inverse de la masse du cylindre $(C2)$ est donc linéaire.

La méthode consiste alors à placer sur la barre plusieurs cylindres de rayons identiques et de masses m_2 différentes, à mesurer les périodes T correspondantes et à tracer la droite $T_2 = f(1/m_2)$.

La pente A de la droite obtenue permet d'en déduire J_0.

Attention: les différents cylindres $(C2)$ doivent être placés à la même distance d_2 de l'axe O.

3.2. Deuxième méthode :

On place sur la barre deux cylindres (C_1) et (C_2) de même rayon $r_1 = r_2 = r$, à la même distance $d_1 = d_2 = d$ (ici $d = 22cm$) de l'axe O. Les cylindres n'ont toutefois pas la même longueur, donc leurs masses m_1 et m_2 sont différentes.

♦**Question 3** : Démontrer qu'en reportant dans la relation (4) ces valeurs particulières de r et de d, on obtient

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2).r^2 + (m_1 + m_2).d^2 + J_0}{(m_2 - m_1)\,d.g}}$$

ou encore, en élevant au carré :

$$T^2 = A'(m_1 + m_2) + B' \text{ (6a)}$$

avec

$$A' = \frac{2\pi^2(r^2 + d^2)}{(m_2 - m_1)\,d.g} \text{ (6b)}$$

et

$$B' = \frac{4\pi^2 J_0}{(m_2 - m_1)\,d.g} \text{ (6c)}$$

Supposons que l'on dispose de plusieurs couples de cylindres (C_1) et (C_2), dont les masses m_1 et m_2 sont différentes mais dont la différence $m_2 – m_1$ reste constante : la relation (6a) montre que la loi reliant le carré de la période T avec la somme des masses $m_1 + m_2$ est linéaire, et que le moment d'inertie J_0 recherché intervient dans le terme constant B'.

La méthode consiste donc à placer sur la barre plusieurs couples de cylindres obéissant à la contrainte $m_2 – m_1 = constante$, à mesurer les périodes correspondantes et à tracer la droite $T_2 = f(m_1 + m_2)$.

L'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées fournit la valeur du terme constant B', dont on tire aisément celle de J_0.

Partie expérimentale

Régler la masse d'équilibrage de façon à ce que le pendule non chargé (c'est-à-dire sans les cylindres) soit équilibré. Pour cela, la barre placée à l'horizontale doit rester en équilibre.

Attention : ce réglage ne devra plus être modifié dans la suite du TP.

[cf. Réglage]

1. Estimation de l'incertitude sur la période T :

Placer sur la barre une masse $m_2 = 100g$ et faire 10 fois la mesure de 5 périodes T.

Calculer la moyenne et estimer l'incertitude élargie sur la période T, $U(T)$.

On considère k= 2 pour un niveau de confiance de 95 %.

On admettra par la suite que l'incertitude due à la chaîne de mesure reste sensiblement la même, et on conservera l'incertitude U(T) trouvée dans cette partie pour toutes les autres mesures de période.

Calcul de l'incertitude sur le carré de la période : les méthodes décrites dans la partie théorique font intervenir T^2.

Démontrer que l'incertitude sur cette grandeur se calcule par la relation $U(T^2) = 2.T.U(T)$

[cf. Incertitude]

Attention

Pour faire les parties 2 et 3 permettant de déterminer J_0, le pendule doit maintenant être obligatoirement lancé avec des angles de départ α_M petits ($20°$ maximum).

2. Détermination du moment d'inertie Jo du pendule pesant à vide avec la première méthode : à partir de la représentation de T^2 en fonction de 1/m2

2.1. Manipulation 1

Vous disposez de plusieurs cylindres (C2) de masses m2 variables.

- a) Pour chacune de ces masses, placées à une distance $d_2 = d = 22cm$ de l'axe O, mesurer le temps correspondant à $5T$; en déduire T, puis T^2 et $U(T^2)$. On conservera la valeur de $U(T)$ trouvée dans la partie 1. Faire le tableau de mesures et calculs.

  $(m2 = 100, 150, 200, 250...500g)$
- b) Porter les points $(1/m_2, T^2)$ sur un papier millimétré en y faisant figurer les barres d'erreurs sur l'ordonnée T^2 (on admettra que les masses m_2 sont données sans incertitudes), $T^2 + U(T^2)$; $T^2 - U(T^2)$.
- c) Tracer la droite moyenne que passe par les points $(1/m_2; T^2)$ et calculer sa pente, p_{moy}.

Tracer aussi les droites extrêmes passant par les barres extrêmes et calculer leur pente, p_{max} et p_{min}.

En déduire $\bar{p}$ et son incertitude $U(p)$

($\bar{p} = \dfrac{p_{max} + p_{min}}{2}, U(\bar{p}) = \dfrac{p_{max} - p_{min}}{2}$)

Comparer les deux pentes p_{moy} et $\bar{p}$. Conclure.

- d) À l'aide de la relation (5b) calculer le moment d'inertie J_0 du pendule pesant à vide, ainsi que son incertitude $U(J_0)$.

2.2. Méthode 1 : m1=0g m2=100g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=100g d2=22cm]

2.3. Méthode 1 : m1=0g m2=150g d2=0,22m

[cf. methode1_m2=150g_d2=22cm]

2.4. Méthode 1 : m1=0g m2=200g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=200g d2=22cm]

2.5. Méthode 1 : m1=0g m2=250g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=250g d2=22cm]

2.6. Méthode 1 : m1=0g m2=300g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=300g d2=22cm]

2.7. Méthode 1 : m1=0g m2=350g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=350g d2=22cm]

2.8. Méthode 1 : m1=0g m2=400g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=400g d2=22cm]

2.9. Méthode 1 : m1=0g m2=450g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=450g d2=22cm]

2.10. Méthode 1 : m1=0g m2=500g d2=0,22m

[cf. methode1 m2=500g d2=22cm]

3. Détermination du moment d'inertie J0 du pendule pesant à vide avec la deuxième méthode : à partir de la représentation de T2 en fonction de (m1+m2)

3.1. Manipulation 2

Vous disposez de plusieurs couples de cylindres (C_1) et (C_2) dont la différence des masses m_2–m_1 est la même.

Assurez-vous d'abord que les cylindres sont correctement associés, puis calculez la somme $m_1 + m_2$ correspondant à chaque couple.

$m_2 – m_1 = 100g, m_1 = 0, 50, 150, 200, 250, 300g$.

- a) Pour chacun de ces couples, faites la mesure de $5T$; en déduire T, puis T^2 et $U(T^2)$.

  Faire un tableau.
- b) Porter les points $(m_1 + m_2 ; T^2)$ sur un papier millimétré en y faisant figurer les barres d'erreurs sur l'ordonnée T^2 (on admettra que les masses m_2 sont données sans incertitudes), $T^2 + U(T^2) ; T^2 - U(T^2)$.
- c) Tracer alors la droite moyenne et les droites extrêmes passant par les barres extrêmes et en déduire l'ordonnée de leur intersection B' avec l'axe des ordonnées (T^2), c'est à dire, la valeur moyenne et son incertitude.
- d) À l'aide de la relation (6c), calculer le moment d'inertie J_0 du pendule pesant à vide, ainsi que son incertitude $U(J_0)$.
- e) Comparer cette deuxième valeur expérimentale avec la valeur obtenue par la première méthode.

Conclusion.

3.2. Méthode 2 : m1=0g m2=100g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=0g m2=100g]

3.3. Méthode 2 : m1=50g m2=150g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=50g m2=150g]

3.4. Méthode 2 : m1=100g m2=200g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=100g m2=200g]

3.5. Méthode 2 : m1=150g m2=250g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=150g m2=250g]

3.6. Méthode 2 : m1=200g m2=300g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=200g m2=300g]

3.7. Méthode 2 : m1=250g m2=350g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=250g m2=350g]

3.8. Méthode 2 : m1=300g m2=400g d1=d2=0,22m

[cf. methode2 m1=300g m2=400g]

Manipulation virtuelle

IV

L'animation suivante vous permet de manipuler le pendule pesant

Attention

Avant de faire des mesures de temps avec le chronomètre de l'animation, vous devez synchroniser la vitesse de l'animation avec le chronomètre de l'animation à partir de la vitesse préréglée!

(En effet cette synchronisation dépend de la machine que vous utilisez pour visionner l'animation.)

[cf. Pendule pesant : moment d'inertie]

lien direct : https://www.geogebra.org/m/ae6tcenh[1]

Réglages :

Avant de faire des mesures de temps avec le chronomètre de l'animation, vous devez synchroniser la vitesse de l'animation avec le chronomètre de l'animation à partir de la vitesse préréglée!

(En effet cette synchronisation dépend de la machine que vous utilisez pour visionner l'animation.)

Réglages :

Pour cela on enlève la masse m_1 (on choisit m_1=0) et on choisit m_2= 450 g, d_2=0,557m et J_0=0.

La période d'oscillation du pendule est alors égale à 1,5 s

Puis on ajuste le curseur "vitesse" pour mesurer un temps égal à cette période en mesurant le temps pour 10 oscillations.

Quand ce temps est obtenu on ne modifie plus la valeur du curseur "vitesse".

Dans cette animation vous avez la possibilité :

- En agissant sur le curseur "d_{1enm}" de régler la distance entre la masse m_1 et l'axe de rotation O entre 0 et 30 cm.
- En agissant sur le curseur "d_{2enm}" de régler la distance entre la masse m_2 et l'axe de rotation O entre 0 et 60 cm.
- En agissant sur le curseur « m_1 » de faire varier la masse m_1 de 0 à 500g.
- En agissant sur le curseur « m_2 » de faire varier la masse m_2 de 0 à 500g.
- En agissant sur le curseur « alpha0 » de régler l'angle d'inclinaison de départ du pendule.
- En agissant sur le curseur « vitesse» de synchroniser le chronomètre avec la vitesse de l'animation.
- En cliquant sur la case à cocher « J_0=0 » de choisir un moment d'inertie égal à 0 pour la tige du pendule pesant.
- En cliquant sur la case à cocher « tirage de J_0» de choisir de façon aléatoire un moment d'inertie J_0 pour la tige du pendule pesant.
- En cliquant sur la case à cocher « tiragealéatoire J_0» de choisir de façon aléatoire un autre moment d'inertie J_0 pour la tige du pendule pesant.

[1] https://www.geogebra.org/m/ansfwywz

- En cliquant sur la case à cocher « Affichage J_0» d'afficher ou non la valeur du moment d'inertie J_0.

pour l'animation :

- En cliquant sur le bouton « Start » de démarrer les oscillations du pendule pesant.
- En cliquant sur le bouton « Stop » d'arrêter les oscillations du pendule pesant.
- En cliquant sur le bouton « Reset » de relancer l'animation à son point de départ.

pour le chronomètre :

- en cliquant sur "Startchrono" de déclencher le chronomètre
- en cliquant sur "Stopchrono" d'arrêter le chronomètre et d'afficher le temps écoulé.

L'objectif de cette animation est donc de déterminer de 2 manières différentes le moment d'inertie J_0 de la tige du pendule pesant(voir "Pendule pesant"

site: http://tpmpathome.univ-lille.fr.