Pendules couplés

Version papier téléchargeable

Table des matières

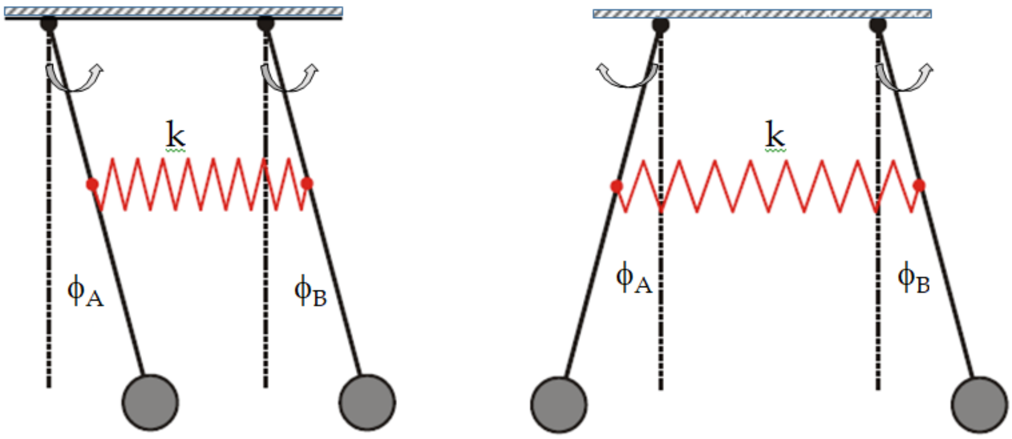
Objectifs

Il s'agit de mettre en évidence les phénomènes d'oscillations de deux pendules identiques couplés (oscillations en phase, opposition de phase et avec battement)

Principe de l'expérience

Deux pendules identiques, A et B, ayant une fréquence d'oscillation caractéristique particulière sont couplés par un ressort hélicoïdal. L'amplitude des deux pendules est enregistrée en fonction du temps pour différents modes d'oscillation et différents facteurs de couplage à l'aide de capteurs angulaires et d'un ordinateur. Les coefficients de couplage sont déterminés par différentes méthodes.

Les oscillations entre deux pendules couplés peuvent être décrites comme superposition de deux oscillations propres ou modes normaux (Figure 1). On peut observer ces oscillations propres en excitant les deux pendules à des oscillations en phase (1er mode propre ou mode symétrique) ou en opposition de phase (2eme mode propre ou mode antisymétrique).



$\phi_A(t)=\phi_B(t)$

1er mode propre (ω_1)

$\phi_A(t)=-\phi_B(t)$

2e mode propre (ω_2)

1. Théorie

1. 1.1 Equations différentielles du mouvement

Considérons deux pendules pesants identiques, P_A et P_B, avec la même pulsation propre, ω_0, et de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation ; ces pendules sont couplés par un ressort de masse négligeable et de constante de raideur k.

Les deux extrémités du ressort sont à la même distance d de l'axe de rotation (O) des deux pendules (voir Figure 2).

On peut utiliser le théorème du moment cinétique ($J\ddot{\Phi} = M$) pour déterminer les équations du mouvement pour les deux pendules couplés.

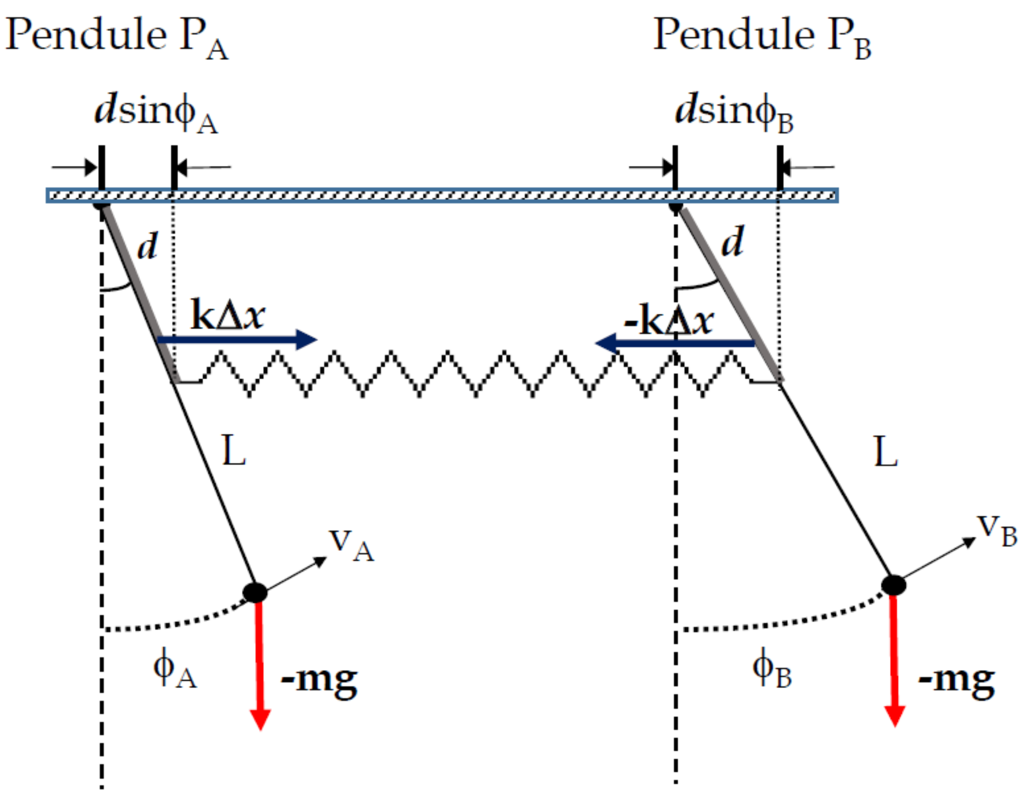
Le ressort entre les deux pendules ajoute un moment de force supplémentaire qui s'ajoute au moment de la force dû au seul poids du pendule ($-mgL\Phi$). L'élongation, Δx, du ressort par rapport à sa longueur d'équilibre est (pour les petits angles d'élongation Φ_A et Φ_B):

$$\Delta x = d(sin\Phi_B - sin\Phi_A) \simeq d(\Phi_B - \Phi_A))$$

Le moment de la force dû au couplage, en utilisant l'approximation valable aux petits angles ($cos\Phi \simeq 1$) est

$$\approx kd^2(\Phi_B - \Phi_A)$$

respectivement, pour le pendule P_A et pour le pendule P_B.



Les équations du mouvement sont donc:

$$J\ddot{\Phi}_A = M_A = -mgL\Phi_A + kd^2(\Phi_B - \Phi_A) \quad (1)$$

$J\ddot{\Phi}_B = M_B = -mgL\Phi_B - kd^2(\Phi_B - \Phi_A)$ (2)

Si on ajoute et on soustrait l'équation (2) de l'équation (1) on obtient :

$J(\ddot{\Phi}_B + \ddot{\Phi}_A) = -mgL(\Phi_B + \Phi_A)$ (3)

$J(\ddot{\Phi}_B - \ddot{\Phi}_A) = -(mgL + 2kd^2)(\Phi_B + \Phi_A)$ (4)

Pour les grandeurs auxiliaires

$\varphi_1 = (\Phi_B + \Phi_A)$ et $\varphi_2 = (\Phi_B - \Phi_A)$

(arbitraires dans un premier temps), on obtient les équations suivantes:

$J\ddot{\varphi}_1 = -mgL\varphi_1$ (5)

$J\ddot{\varphi}_2 = -(mgL + 2kd^2)\varphi_2$ (6)

et dont les solutions sont données par:

$\varphi_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \delta_1)$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$ (7)

$\varphi_2(t) = A_2 cos(\omega_2 t + \delta_2)$ avec $\omega_2 = \sqrt{\frac{(mgL + 2kd^2)}{J}}$ (8)

$A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

La solution de l'équation du mouvement pour le pendule P_A et pour le pendule P_B est donc:

$\Phi_A(t) = \frac{1}{2}[A_1 cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 cos(\omega_2 t + \delta_2)]$ (9)

$\Phi_B(t) = \frac{1}{2}[A_1 cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 cos(\omega_2 t + \delta_2)]$ (10)

2. 1.2 Les modes propres

Les deux modes propres sont obtenus selon les conditions initiales suivantes :

a) 1er mode propre

$\Phi_A(0) = \Phi_B(0) = \Phi_0$ et $\dot{\Phi}_A(0) = \dot{\Phi}_B(0) = 0$ (pendules au repos).

La solution est :

$\Phi_A(t) = \Phi_B(t) = \Phi_0 cos(\omega_1 t)$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{mgL}{J}} = \omega_0$ (11)

Le couplage ne joue aucun rôle car le ressort reste toujours dans le même état de tension. Les deux pendules oscillent en phase avec la même amplitude et la même période, T_{ω_1}. Cette période est égale à la période de chaque pendule non couplé (T_0).

b) 2ème mode propre

$\Phi_A(0) = 0, \Phi_B(0) = -\Phi_0$ et $\dot{\Phi}_A(0) = \dot{\Phi}_B(0) = 0$

La solution est :

$\Phi_A(t) = -\Phi_B(t) = \Phi_0 cos(\omega_2 t)$ (12)

avec \omega_{2}=\sqrt{\frac{mgL+2kd^{2}}{J}}=\omega_{0}\sqrt{1+\frac{2kdmgL^{2}}{}} (13)

Les deux pendules oscillent avec la même amplitude et la même pulsation, ω_2, mais avec une différence de phase de π. Le couplage entre les deux pendules résulte en une augmentation de la pulsation, ou de façon équivalente, en une diminution de la période,T_{ω_2}, par rapport à T_0.

Le coefficient de couplage K dépend de la constante de raideur k du ressort et de la distance entre le point de fixation du ressort de couplage et la suspension du pendule, la longueur de couplage d, selon la définition suivante:

$$K = \frac{kd^2}{mgL + kd^2} \quad (14)$$

3. 1.3 Oscillations avec battements

Pour les oscillations avec battements, l'introduction des conditions initiales suivantes

$\Phi_A(0) = 0, \Phi_B(0) = \Phi_0$ et $\dot{\Phi}_A(0) = \dot{\Phi}_B(0) = 0$

permet d'obtenir la solution:

$$\Phi_A(t) = \frac{1}{2}\Phi_0[cos(\omega_1 t) - cos(\omega_2 t)] \quad (15)$$

$$\Phi_B(t) = \frac{1}{2}\Phi_0[cos(\omega_1 t) + cos(\omega_2 t)] \quad (16)$$

et en utilisant les formules trigonométriques:

$$\Phi_A(t) = \Phi_0 sin(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t) sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t) \quad (17)$$

$$\Phi_B(t) = \Phi_0 cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t) cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t) \quad (18)$$

Les mouvements des deux pendules A et B présentent alors le phénomène typique de battement.

On distingue dans ces deux solutions la fréquence de pulsation moyenne, $\overline{\omega} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ et la fréquence de pulsation de battements, $\omega_b = \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

On rappelle à cet stade que ω_1, ω_2 et le coefficient de couplage K sont définis par les équations (11), (13) et (14), respectivement.

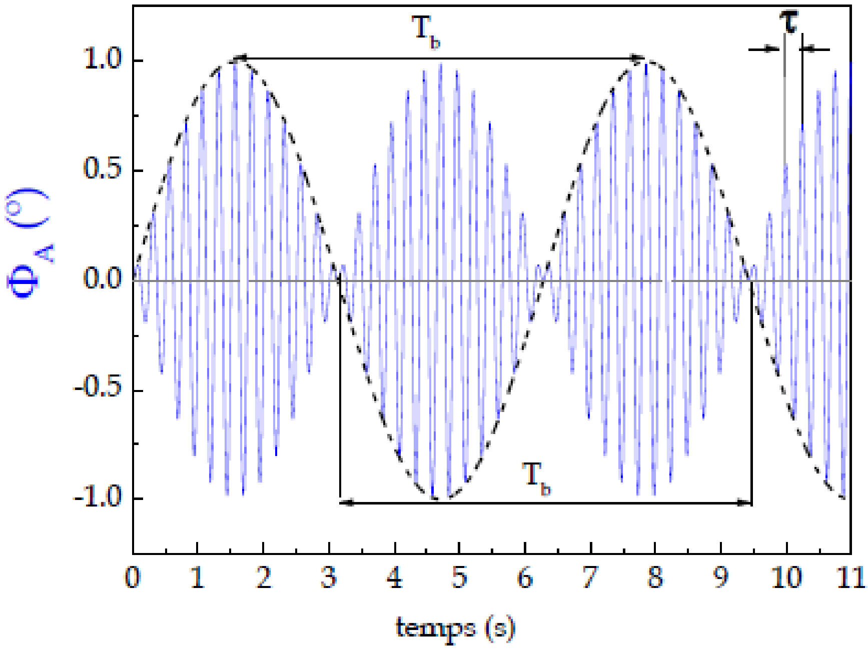
Si le moment de la force dû au couplage est faible vis-à-vis du moment de la force dû au poids, alors $kd^2 \ll mgL$ et ω_2 est proche de ω_1, c.à.d. $(\omega_2 - \omega_1) \ll (\omega_2 + \omega_1)$.

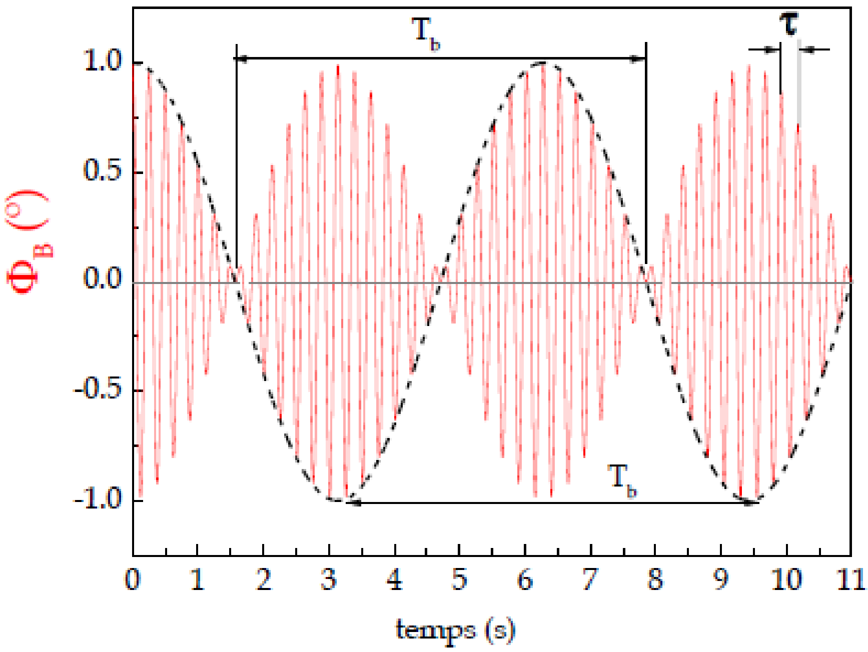
Les fonctions $sin(\omega_b t)$ et cos(\omega_{b}t) varient lentement par rapport à $sin(\overline{\omega}t)$ et $cos(\overline{\omega}t)$.

L'amplitude d'un des pendules (voir Figure 3) variant à la fréquence moyenne $\overline{\omega}$ est modulée par la faible fréquence de battements ω_b. Le déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre le sinus et le cosinus traduit les battements entre les deux pendules: lorsque un pendule a son amplitude maximale, l'autre est arrêté.

L'énergie mécanique passe progressivement à chaque oscillation d'un des pendules à l'autre par l'intermédiaire du ressort de couplage.

Autrement dit, le mouvement peut se comprendre comme des oscillations rapides avec une période $\tau = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$ et une amplitude, $A(t)$, variant lentement de façon sinusoïdale: cette amplitude s'annule périodiquement avec une période $T_b = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$, appelée période des battements et qui représente la période de l'enveloppe de la courbe (courbe en tirets dans la Figure 3); T_b correspond au temps compris entre trois arrêts consécutifs du même pendule.





La période de battement, T_b, est l'intervalle de temps qui représente la période de l'enveloppe de la courbe (tirets) et qui correspond à trois arrêts consécutifs du même pendule de période d'oscillation τ.
(Simulations avec $\Phi_0 = 1$ degré ; $\overline{\omega} = \dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 25$ rad/s ;

$\omega_b = \Delta\omega = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 1$ rad/s)

2. Partie expérimentale

1. Introduction

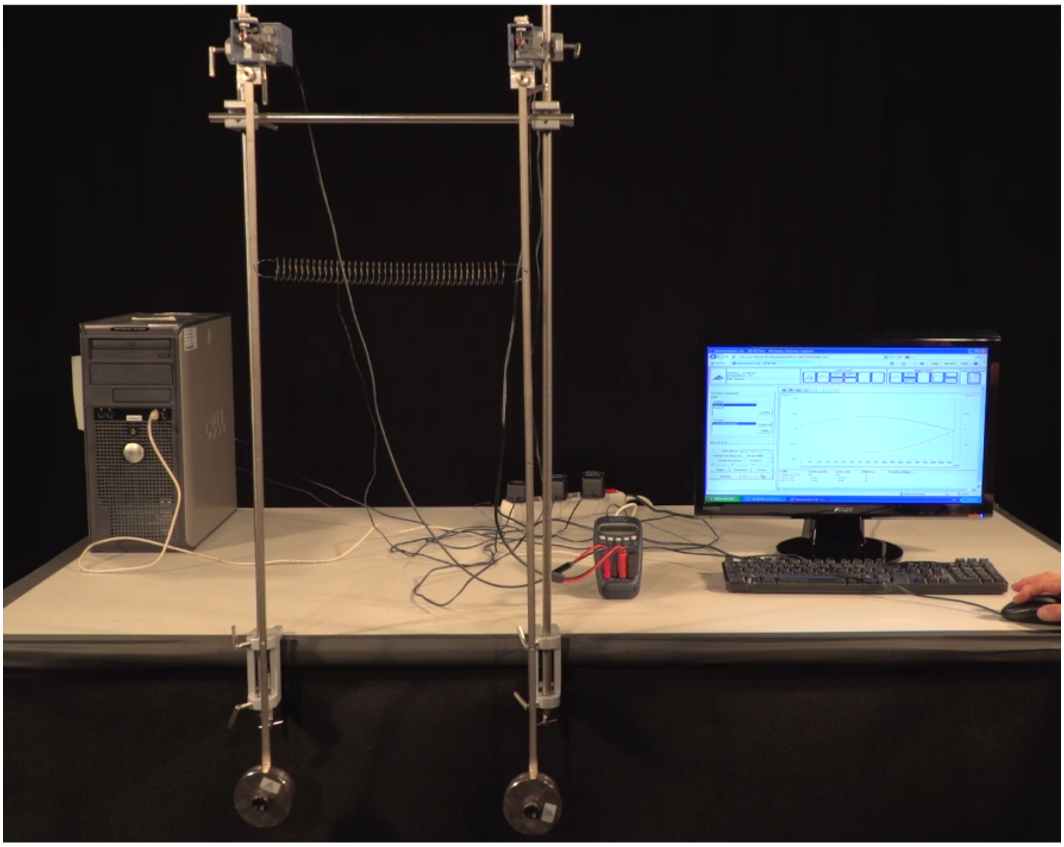
On dispose du montage représenté dans la Figure 4, où deux pendules identiques sont couplés par un ressort ($3N/m$) de masse négligeable face à la masse des pendules. Le ressort peut être accroché dans les trous situés sur les barres de pendule en trois positions différentes (correspondant à trois longueurs de couplage, d, que vous devrez mesurer avec une règle).

Faire attention à ne pas abîmer le ressort.

Les deux pendules sont constitués de tiges très légères auxquelles sont fixées à leur extrémité inférieure une masse $M = 1kg$.

Des capteurs angulaires sont fixés à l'extrémité supérieure des tiges de support verticales fixées sur le plan de travail.

Les deux capteurs sont raccordés aux entrées de tension du $3BNETlogTM$ qui est connecté à l'ordinateur.



Les pendules sont accrochés sur les capteurs angulaires : des encoches sont prévues dans les tiges des capteurs pour les aiguilles du dispositif de suspension du pendule.

[cf. Présentation des pendules couplés]

Éviter toute sollicitation du pendule hors de son plan d'oscillation pour ne pas endommager les dispositifs de suspension des pendules.

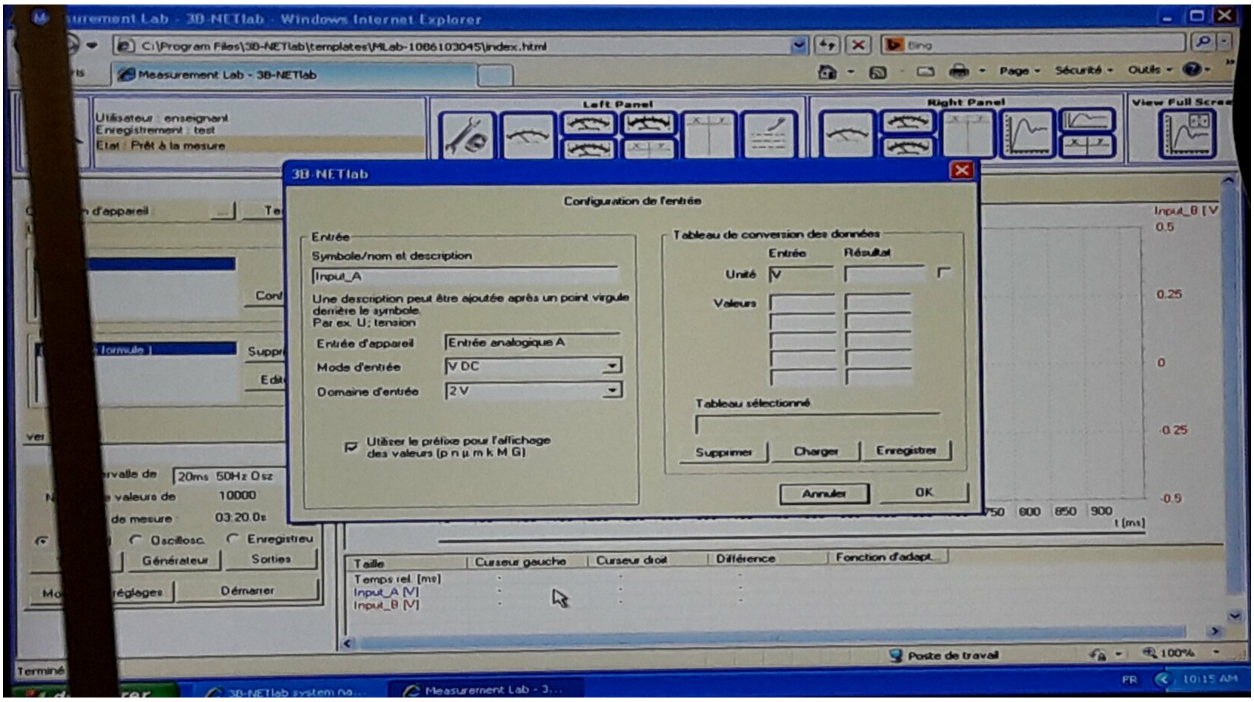
Pour régler les pendules en vibration, toucher les barres de support par le bout des doigts sur leurs tiers supérieur et les déplacer simultanément par un petit mouvement de va et vient jusqu'à ce que les amplitudes désirées soient mises en place. De cette façon, les vibrations transversales peuvent être évitées.

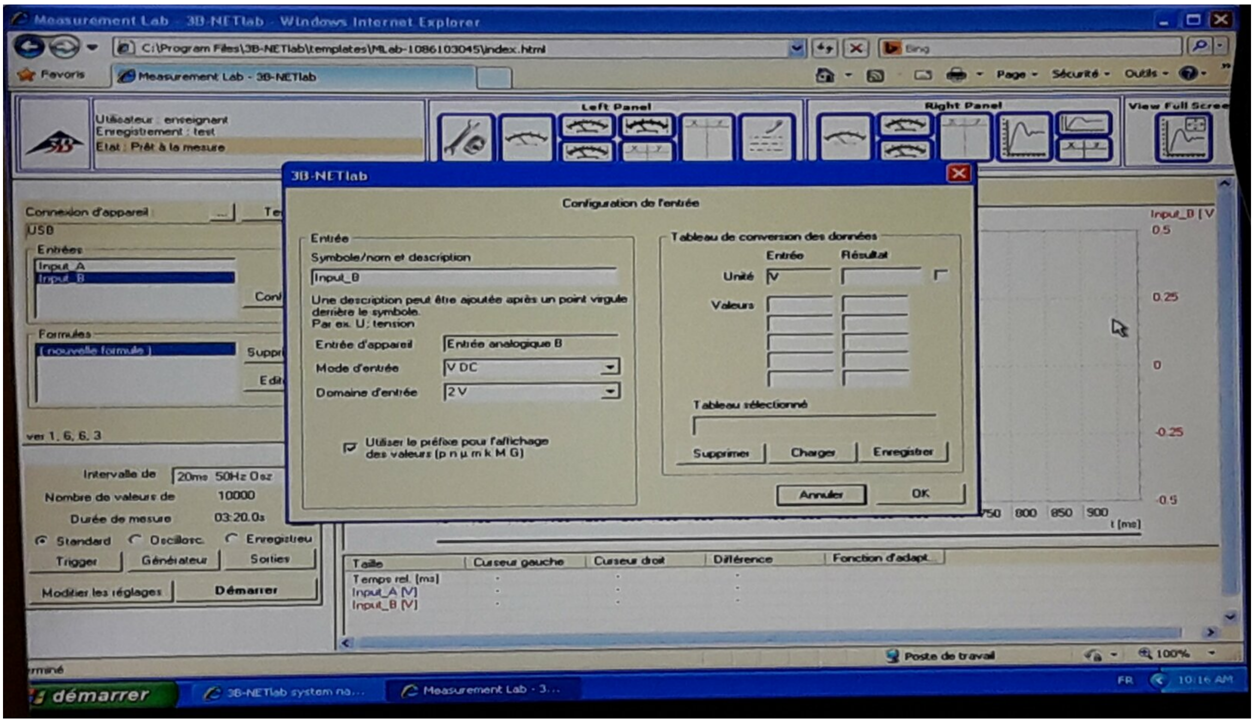
Dans toutes les mesures veiller aussi à ce que les amplitudes soient suffisamment réduites pour pouvoir utiliser l'approximation

$sin\Phi \approx tg\Phi \approx 1$ soit $\Phi \leq 5°$

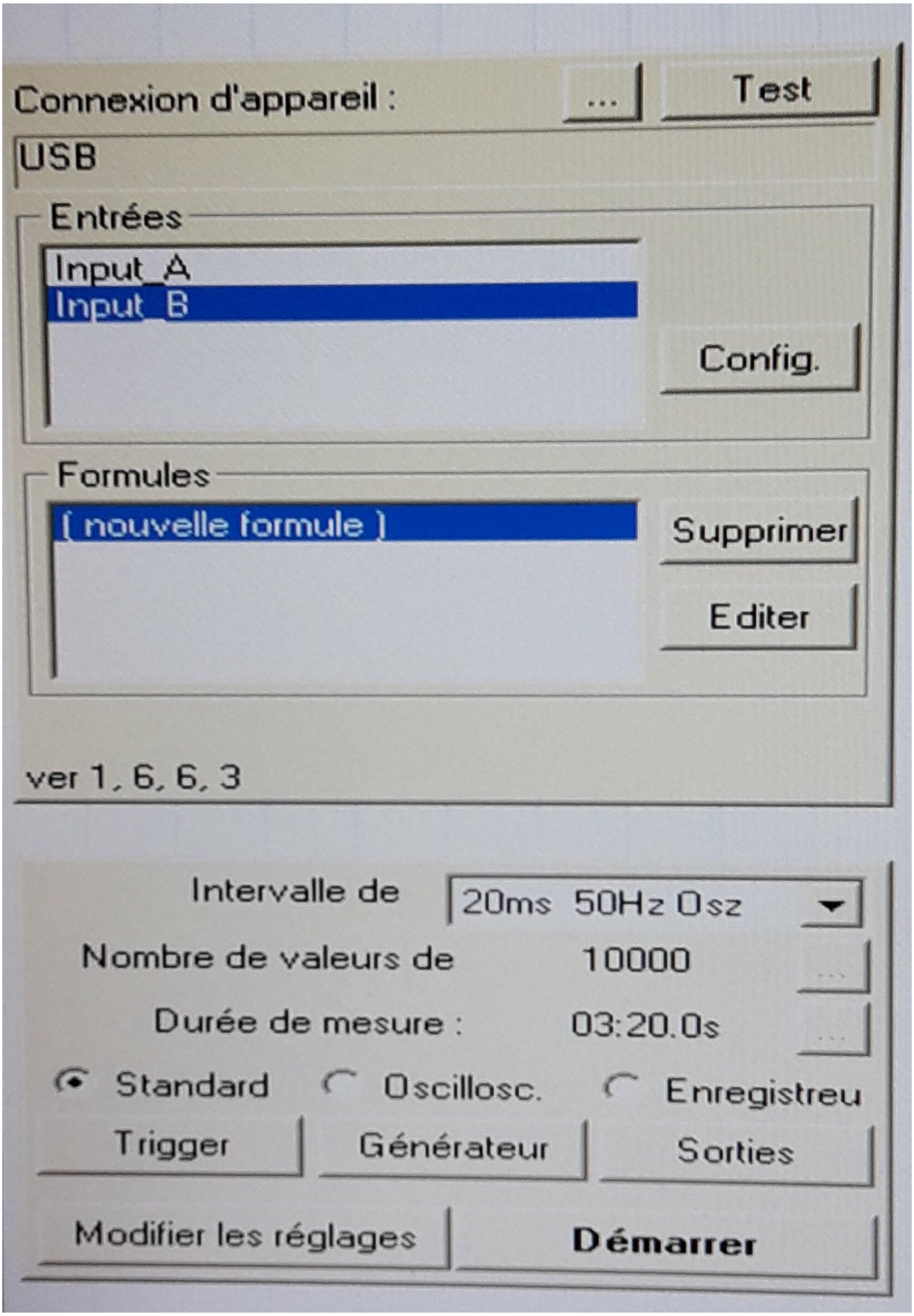
2. 2.1 Protocole expérimental

- Brancher $3BNETlog^{TM}$ et lancer le programme informatique $3BNETlab^{TM}$.
- Sélectionner « Laboratoire de mesure » et créer un nouveau fichier.





- Sélectionner les entrées analogiques A et B et régler chacune d'elles sur la plage de mesure $2V$ en mode tension continue (Vdc).



- Régler les paramètres de mesure suivants : Taux :$20ms\ 50Hz$, nombre de valeurs de mesure : 10000, mode : standard.

3. 2.2 Mesures

3.1. 2.2.1 Etude du pendule seul

L'objectif est de vérifier le mouvement harmonique d'un pendule simple (non couplé) et de mesurer la période (et la pulsation propre) d'oscillation.

Pour la suite des manipulations avec les pendules couplés, il est important que les fréquences de pulsation caractéristiques (ω_0) des deux pendules non couplés soient identiques dans les limites d'incertitudes : pour cela on peut ajuster la position des deux cylindres sur les barres des pendules jusqu'à que les pendules aient la même valeur moyenne de période, T_0.

- Enlever le ressort pour découpler les deux pendules. Régler les oscillations (petites) de deux pendules individuellement.
- Démarrer l'enregistrement des oscillations dans $3BNETlab^{TM}$.
- Une fois cet enregistrement terminé, sélectionner « Retour» et enregistrer la mesure sous un nom pertinent.

Pour déterminer la période d'une oscillation spécifique :

- ouvrir le fichier concernant l'oscillation
- entourer sur le diagramme au moins 10 périodes d'oscillations d'un pendule au moyen de curseurs; ce faisant, placer exactement chacun des deux curseurs sur le passage au point zéro d'un flanc montant pour permettre l'inclusion d'un nombre important de périodes (cf. vidéos ci-dessous).

[cf. Mesure de la période des 2 pendules]

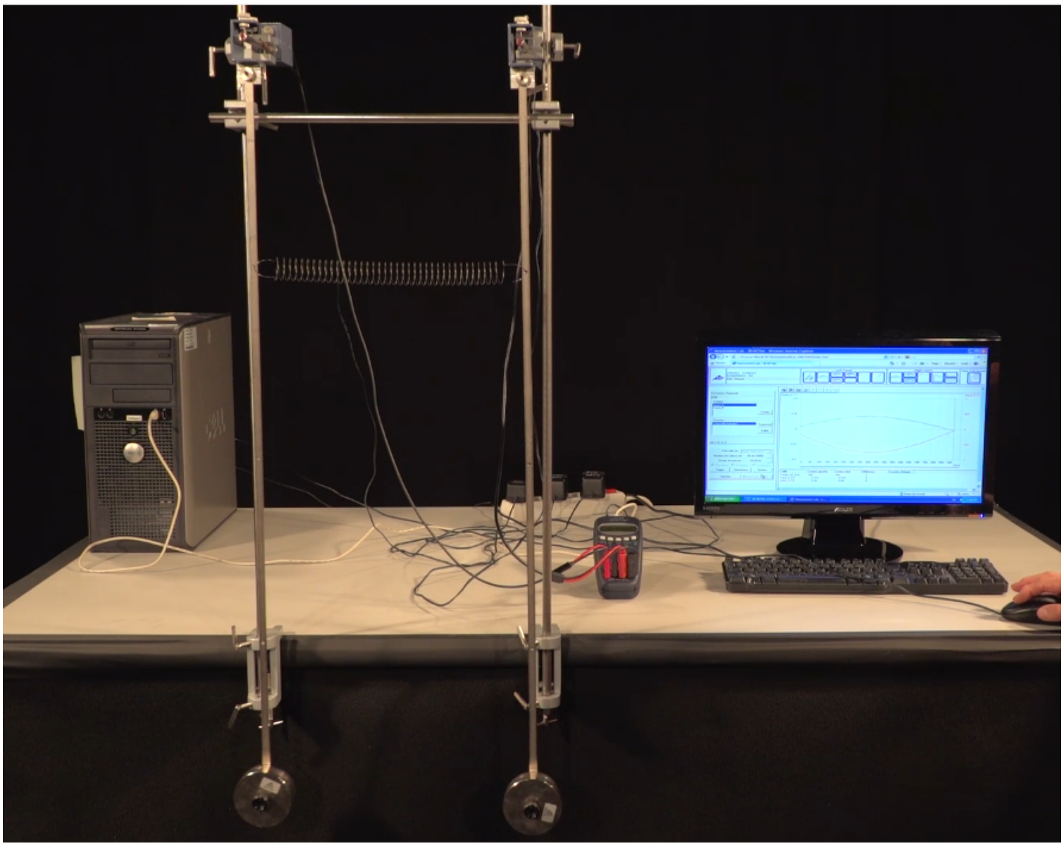
reprendre 2 fois

- Mesurer (3 fois) la période d'oscillation des deux pendules non-couplés (en prenant le temps pour au moins 10 périodes).
- Calculer la valeur moyenne de la période $\overline{T_0}$ et de la pulsation propre $\overline{\omega_0}$ du pendule.
- Évaluer l'incertitude.

Remarque

Si les deux valeurs moyennes des périodes ne sont pas égales, demander de l'aide à l'enseignant : on doit bouger une des masses (cylindre) dans la bonne direction et refaire les mesures en utilisant le protocole précédent.

3.2. 2.2.2 Etude des pendules couplés



- Fixer le ressort de couplage à la même distance d de l'axe de rotation (commencer par la plus petite distance).
- Réajuster le zéro des échelles de voltage aux positions d'équilibre des pendules. On pourra vérifier sur le boîtier que les tensions sont nulles en position d'équilibre.

Remarque

La position au repos des pendules n'est pas la verticale de façon que le ressort ait toujours une certaine tension.

Si cette déviation est prise en compte, nous obtenons néanmoins les mêmes équations de mouvements des pendules couplés (1) et (2).

- Enregistrer les courbes d'amplitudes des oscillations des pendules couplés pour les trois différentes longueurs de couplage, d, en fonction du temps, en utilisant les conditions initiales suivantes :

1ère distance : 28 cm

[cf. Pendules couplés d=28 cm en phase]

- Les deux pendules sont inclinés du même angle (inférieur à 5^{o}), du même côté et simultanément relâchés (sans vitesse initiale): oscillation en phase.

[cf. Pendules couplés d=28 cm en opposition de phase]

- Les deux pendules sont inclinés du même angle (petit) mais dans des directions opposées et simultanément relâchés: oscillation en opposition de phase.

[cf. Pendules couplés d=28 cm battements]

- Un pendule est maintenu en position de repos. Le second pendule est incliné d'un angle petit puis relâché (en même temps que le premier): phénomène de battement.

2ème distance 53 cm

[cf. Pendules couplés d=53 cm en phase]

- Les deux pendules sont inclinés du même angle (inférieur à 5^o), du même côté et simultanément relâchés (sans vitesse initiale): oscillation en phase.

[cf. Pendules couplés d=53 cm en opposition de phase]

- Les deux pendules sont inclinés du même angle (petit) mais dans des directions opposées et simultanément relâchés: oscillation en opposition de phase.

[cf. Pendules couplés d=53 cm battements]

- Un pendule est maintenu en position de repos. Le second pendule est incliné d'un angle petit puis relâché (en même temps que le premier): phénomène de battement.

3ème distance 78 cm

[cf. Pendules couplés d=78 cm en phase]

- Les deux pendules sont inclinés du même angle (inférieur à 5^o), du même côté et simultanément relâchés (sans vitesse initiale): oscillation en phase.

[cf. Pendules couplés d=78 cm en opposition de phase]

- Les deux pendules sont inclinés du même angle (petit) mais dans des directions opposées et simultanément relâchés: oscillation en opposition de phase.

[cf. Pendules couplés d=78 cm battements]

- Un pendule est maintenu en position de repos. Le second pendule est incliné d'un angle petit puis relâché (en même temps que le premier): phénomène de battement.

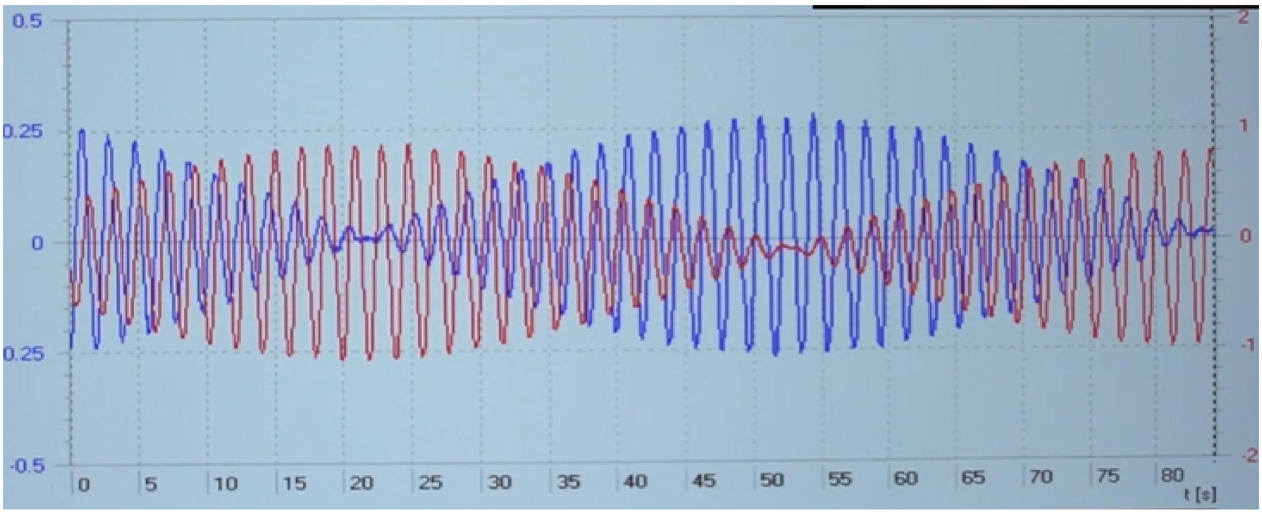
L'enregistrement des courbes en fonction du temps et l'évaluation des périodes se fait comme décrit précédemment.

4. 2.3 Calculs et interprétations

4.1. 2.3 .1 Pendule non couplé

- Calculer la valeur de la période théorique T_{th} du pendule en tenant compte seulement du cylindre de M = 1 kg (appliquer le théorème de Huyghens pour le calcul du moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, J).
- Comparer la valeur expérimentale, $\overline{T_0}$, avec la valeur théorique de la période,T_{th}. Commenter...

4.2. 2.3.2 Pendules couplés



1. Calculer les pulsations propres des deux pendules couplés en mode symétrique (en phase, 1er mode propre ω_1 et antisymétrique (en opposition de phase, 2eme mode propre ω_2, à partir des valeurs des périodes correspondantes T_{ω_1}; T_{ω_2}.

   En utilisant ces valeurs, calculer les périodes caractéristiques, τ et T_b, du mouvement des deux pendules couplés avec battements, qu'on appellera pour la suite, τ_{cal} et $T_{b,cal}$.

2. étude de battements (vérification expérimentale que le mouvement d'un système de deux pendules couplés peut être considéré comme une superposition de deux modes propres)

   - comparer la valeur expérimentale de la période de battements, T_b, et de la période τ, avec $T_{b,cal}$ et τ_{cal}.

   Pour déterminer la période d'oscillation τ, prendre au moins 6 périodes bien visibles entre deux immobilisations successifs du même pendule (cf. Fig. ci-dessus).

   Déterminer la période de battement T_b (voir figure 3).

3. Démontrer que le coefficient de couplage, K, peut être calculé à partir des fréquences individuelles des modes d'oscillations:
   - pour le cas des oscillations en opposition de phase:
     $$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_2^2 + \omega_0^2} = \frac{T_0^2 - T_{w_2}^2}{T_0^2 + T_{\omega_2}^2}$$
   - pour le cas des battements:
     $$K = \frac{2\overline{\omega}\omega_b}{\overline{\omega}^2 + \omega_b^2} = \frac{2T_b\tau}{T_b^2 + \tau^2}$$

   Calculer le coefficient de couplage pour les trois différentes longueurs de couplage et comparer avec la valeur obtenue à partir des paramètres du système (k, L, d, m).

4. Tracer le graph de ω^2 (fréquence angulaire du mode antisymétrique) en fonction de d^2.

   Commenter la forme de la tendance.

   Déterminer la fréquence caractéristique du pendule non couplé et la constante de raideur du ressort k.

   Commenter les résultats obtenus.

5. Tracer les graphes $\overline{\omega} = f(d^2)$ et $\omega_b = f(d^2)$.

   Commenter la forme de la tendance.

   Déterminer la fréquence caractéristique du pendule non couplé et la constante de raideur du ressort k.

   Commenter les résultats obtenus.

   Conclure.

Manipulation virtuelle

IV

L'animation suivante vous permet de manipuler les pendules couplés

[cf.]

Dans cette animation vous avez la possibilité :

• En agissant sur le curseur « longueur » de régler simultanément la longueur des 2 pendules A (rouge) et B (bleu).

• En agissant sur le curseur « distanceaxeressort » de régler la distance entre les axes d'oscillation des 2 ressorts et leurs points de fixation.

• En agissant sur le curseur « raideur » de faire varier le coefficient de raideur du ressort.

• En agissant sur le curseur rouge « alpha0A » de régler l'angle d'inclinaison de départ du pendule A rouge.

• En agissant sur le curseur bleu « alpha0BA » de régler l'angle d'inclinaison de départ du pendule B bleu.

• En cliquant sur la case à cocher « raideur=0 » de supprimer le ressort et donc le couplage entre les 2 pendules A et B avec la possibilité de régler l'angle d'inclinaison de départ du pendule B bleu.

• En cliquant sur la case à cocher « curseurs » de faire apparaître, au niveau de la représentation graphique, des curseurs permettant d'afficher un écart temporel : « Δtemps » entre les 2 curseurs.

• En agissant sur le curseur « amplitude » d'ajuster l'amplitude de la représentation graphique des oscillations des 2 pendules.

• En cliquant sur le bouton « Démarrer » de démarrer l'animation.

• En cliquant sur le bouton « Arrêter » de figer l'animation.

• En cliquant sur le bouton « Reset » de relancer l'animation à son point de départ.

L'objectif de cette animation est donc de tracer la courbe représentant l'évolution de l'amplitude des oscillations des pendules A et B.

S'ils ne sont pas couplés on pourra déterminer la période d'oscillation propre des pendules.

S'ils sont couplés on pourra observer leurs oscillations en phase, en opposition de phase ou leurs battements en ajustant correctement les paramètres de départ alpha0A et alpha0B.

accès direct :

https://ggbm.at/rq5jmtpx